A W Beauclerk.

v. 1

SECTIONUM
CONICARUM
LIBRI V.

Auctore ROBERT(O) SIMSON,
In Academia *Glasguensi* MATHESEOS Professore.

EDINBURGI,
Apud T. & W. RUDDIMANNOS. MDCCXXXV.

2/6

Illuſtriſſimo, nobiliſſimo ac potentiſſimo Domino,

D. ARCHIBALDO,

Comiti & Vicecomiti de ILAY,

Domino Orronſay, Dunoon & Arroſe;

Magni apud SCOTOS Sigilli Cuſtodi; Supremæ in Criminalibus Curiæ Præſidi, in Civilibus Senatori extraordinario; Regique a ſanctioribus Conſiliis;

Bonarum Artium ac Scientiarum Patrono pariter atque Cultori eximio,

L. M. Q. D. D.

ROBERTUS SIMSON.

Ad Lectorem Præfatio.

CUM multa in Geometria sint problemata, quæ circuli tantum & lineæ rectæ ope solutionem non admittant, verosimile est veteres Geometras, hoc animadvertentes, ad compositionem problematum solidorum & linearium, sectiones conicas, conchoides, cissoides & id genus lineas alias excogitasse: & Eratosthenes quidem Cyrenæus, in Epigrammate, quod subjunxit Epistolæ suæ ad Ptolemæum Regem (a), sectionum conicarum inventionem Menæchmo tribuit:

> Μηδὲ σύ γ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
> Μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
> Δίζηαι.

Menæchmus vero Eudoxi Cnidii auditor fuit, usúsque est Platonis consuetudine; ut Proclus refert in Comment. in lib. 1. Elem. Euclidis: unde non immerito conjicere licet, ipsum sectiones conicas invenisse, cum solutionem problematis De duplicando cubo investigaret, quod Platonis tempore Geometrarum ingenia magnopere exercuit. Hoc saltem ex Eutocio manifestum est, Menæchmum omnium primum problema illud ope sectionum conicarum solutum dedisse: nullus enim ex undecim Geometris, quorum solutiones tradit Eutocius, sectionibus conicis in eo solvendo utitur, præter Menæchmum, &, ipso multo juniorem, Apollonium Pergæum.

Aristæus autem senior primus videtur libros quosdam de sectionibus hisce edidisse: scripsit enim De locis solidis libros quinque; quibus editis, ipsum de Mathesi præclare meritum fuisse auctor est Pappus Alexandrinus, in præf. ad lib. 7. Collectionis Mathematicæ, qui unus Aristæi ejusque scriptorum meminit. Aristæum, ut idem Pappus refert, proximè sequutus est Euclides, qui quatuor Conicorum libros conscripsit; quos fusius explicavit Apollonius, adjectisque quatuor aliis libris, edidit

(a) Exstat in Eutocii Ascalonitæ commentariis in lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro.

dit octo Conicorum *volumina, quæ, excepto lib. 8. magno Geometriæ emolumento adhuc servata sunt.*

Ante Apollonium vero quadraginta circiter annis floruit Archimedes, qui primus parabolico spatio æqualem figuram rectilineam invenit, aliaque multa de conoidibus & sphæroidibus, egregia quidem, & principe Geometrarum digna, demonstrata reliquit.

Post Apollonium vero, eosque qui in Conica *ejus commentati sunt, (inter quos fuit Serenus Antissensis, qui & libros duos* De sectione cylindri & coni *composuit,) nullus, quod sciam, Conica tractavit, usque ad seculum proxime superius, quo Geometræ eximii, Claudius Mydorgius, Gregorius a Sancto Vincentio & Vincentius Viviani, de sectionibus conicis fusè scripserunt. Hi autem omnes, antiqui & recentiores, curvas has a sectione coni derivarunt, & ipsarum naturam & affectiones primas ope ipsius coni ostenderunt.*

Doctissimus vero Wallisius, quo hæc faciliora exhiberet, harum curvarum, nullâ coni habitâ ratione, elementa tradidit, in 2. parte tractatûs sui De sectionibus conicis, *quem anno* MDCLV. *edidit. Hunc sequutus est hac in re vir illustris Joannes de Witt, ut & Philippus de la Hire, in libello suo Parisiis edito* MDCLXXIX. *diversis tamen sectionum harum descriptionibus seu definitionibus adhibitis, aliique post eos bene multi, inter quos eminet Ill. Marchio de l'Hospital. Hi autem omnes, præter Joannem de Witt, in libro suo primo, & Ph. de la Hire, in demonstrationibus suis, calculo utuntur algebraico, seu arithmetico; quo, ut & inepto ejusdem calculi in multis aliis geometricis usu, factum est ut pauci sint hoc seculo, qui genuinâ veterum methodo, sive analyticâ sive syntheticâ, vel in theorematis demonstrandis vel in problematis resolvendis, uti norint. Quin & in Elementis conicis* evanescentes quantitates *in quibusdam propositionibus demonstrandis, nullâ premente necessitate, adhibuerunt nonnulli, ut in prop. 13. lib. 4. jam memorati Dom. de l'Hospital. Certum verò est Euclideâ & Archimedeâ* Exhaustionum *methodo hanc magis geometricam haud censendam esse: quamvis igitur legitimè* Exhaustionum *methodo usus sit Euclides, v. gr. in 2. lib. 12. Elem. demonstranda, non tamen in demonstranda 20. lib. 6. Elem. eandem quispiam pari jure adhibuerit, quoniam scilicet figuræ rectilineæ similes inter se comparari sine hac methodo facile possunt; & similiter* evanescentes quantitates, *ubi nulla ex rei natura cogit necessitas, adhibendæ non sunt. Iisdem etiam utitur Jacobus Milnius, in propositionibus de circulis eandem cum sectionibus conicis curva-*

turam

turam habentibus; quæ tamen magis geometricè veterum more demonstrari possunt.

Ut igitur huic malo indies serpenti occurratur, atque Geometria, quæ, farragine calculi arithmetici diu oppressa, inculta & neglecta jacet, ad pristinam in hisce ἀκρίβειαν *& perspicuitatem quodammodo restituatur, utque incrementum qualecunque accipiat, Elementa hæcce conscripsimus; in quibus quidem sectiones conicæ ex ipsarum in plano descriptionibus definiuntur, affectiones vero earundem geometricè demonstrantur. Ut autem ipsarum origo primaria ex sectione coni simul innotesceret, visum fuit Apollonii primas aliquot definitiones & propositiones libro primo annectere, quarum ope sciz. ostendatur curvas in plano descriptas easdem omnino esse quas veteres a sectione coni derivarunt.*

Propositionum jamdudum cognitarum non paucæ demonstrationes novæ, quædam etiam novæ propositiones in sequentibus traduntur. Has inter numerandæ sunt eæ quæ in scholio prop. 47. lib. 5. habentur, ut & propp. 44. 45. hujusque casus; quarum originem æquum est hic tradere. Multis ab hinc annis mecum communicavit Mathematicus eximius, vir doctissimus, mihique amicissimus, Colinus Maclaurin, in Academia Edinburgensi Matheseos Professor, hunc locum solidum, sciz. Si a tribus punctis datis, quæ non sunt in recta linea, ducantur tres rectæ lineæ, & ipsarum intersectiones duæ tangant rectas positione datas; tanget reliqua intersectio sectionem conicam positione datam, *atque simul methodum elegantissimam describendi, ope hujus loci, sectionem per data quinque puncta. Post aliquot verò annos narravit mihi sectionem conicam semper descriptum iri quotcunque assumantur puncta, & rectæ lineæ, dummodo earum intersectiones omnes, unâ exceptâ, tangant rectas positione datas; horum demonstrationes nullas impertivit, quas tamen lemmatis cujusdam Neutoniani ope se confecisse dicebat. Cum autem hujus loci, & methodi sectionem describendi ex eo pendentis, demonstrationem investigarem, incidi in propp. lib. 5. jam memoratas. De hisce verò Lectorem monendum duxi, ut ipse judicet quantum amici inventa hisce nostris contulerint.*

Invenies, L. B. conversas *quarundam propositionum demonstratione hic munitas, quas sciz. recentiores sine ulla demonstratione usurpant; quo fit, ut ipsi aliquoties in errores incidant, in iis nimirum demonstrandis quæ ex his* conversis *pendent. Et, ne hoc temere dicere videar, libet ex plurimis unum hujus rei exemplum adferre. In articulis* 41. 55. *libri prius memorati D. de l'Hospital, ostendit Auctor* esse quadratum ex ordinatim applicata

cata diametro Ellipseos ducta a quovis in Ellipsi puncto, ad rectangulum contentum segmentis diametri, ut quadratum ex diametro quæ parallela est ductæ, ad quadratum ex diametro cui ordinatim applicata est. *Hujus autem propositionis duæ sunt conversæ, quarum prima hæc est :* Si in Ellipsi ducantur duæ diametri conjugatæ VX, ET; & a Vid. Tab.
puncto quodam G ducatur GK uni diametrorum parallela, & alteri VI. Fig.
occurrens in K; fueritque quadratum ex ducta GK ad rectangulum 15. n. 1, 2.
EKT, contentum sciz. segmentis diametri, ut quadratum ex VX ad quadratum ex ET : erit punctum G in hac Ellipsi, quæ ex hypothesi jam descripta est. *Hujus quidem demonstratio ex absurdo illico patet, ut in cor. 2. prop. 15. lib. 2. huj. ostensum est : quare neque culpandus esset quispiam qui eam omitteret. Altera vero ejusdem propositionis conversa hæc est :* Si duæ rectæ VX, ET se mutuo bifariam secuerint, & a puncto quodam G ducatur GK, uni ipsarum VX parallela, alterique occurrens in K; fueritque quadratum ex GK ad rectangulum EKT, ut quadratum ex VX ad quadratum ex ET : erit punctum G in Ellipsi cujus duæ ex diametris conjugatis sunt VX, ET. *Manifestum autem est, hanc (in qua quidem Ellipsis ex hypothesi non descripta est) nullatenus demonstrari posse, nisi ostendatur Ellipsin circa ipsas* VX, ET, *tanquam diametros conjugatas, posse describi; enimvero hoc ostenso deventum erit ad conversam præcedentem. Quum igitur Dom. de l'Hospital, in propp.* 13, 14. *lib.* 2. *problema proponit, quo describenda est Ellipsis circa datas duas diametros conjugatas, ipsumque demonstrare conatur ex articulis* 41, 55. *hoc est, ex præcedentium conversarum secunda, (nam hæc sola rem attingit,) quæ, ut jam ostensum est, ex ipsius prop.* 13. *aut* 14. *necessariè pendet; manifestum est in hac re vitium esse petitionis principii, quod Logici* circulum *dicunt. Eodem etiam vitio laborat prop.* 10. *ejusdem lib.* 2. *ex qua pendet* 11. *Hæc autem fusius ostendere visum est, quoniam a paralogismis hujusmodi, qui passim occurrunt, pauci sibi cavent.*

Ad problemata quod attinet : Quæ difficultatis aliquid habere videbantur, ea analysi geometricâ, ope Datorum Euclidis, soluta sunt; additis etiam ipsorum determinationibus, sive διορισμοῖς, sine quibus, ut Geometris notum, problema ritè solutum minime habendum est. Atque hoc eo lubentius fecimus, quo æquis rerum æstimatoribus appareat, quanto melius, viâque magis naturali & perspicuâ, problemata geometrica veterum analysi, quam calculo algebraico solvantur. In quibus autem differat analysis geometrica ab ea qua calculo instituitur algebraico, atque ubi

hæc

hæc aut illa sit usurpanda, atque quæ sint in mathematicis utriusque partes propriæ, aliàs disserendum.

Cæterum, propositiones Euclideas subinde citare necessarium duximus; piget enim observare Scriptores inter recentiores Mathematicos, magni etiam nominis, in Euclidis Elementis parum adeo versatos esse, ut in Elementis suis conicis aliisque, propositiones ejus priores ope posteriorum demonstrent, v. gr. 24. lib. 1. Elem. per 47. ejusdem, & 3. lib. 6. per 7. ejusdem, & 14. lib. 6. per 16. & 23. ejusdem, & similia. Quapropter Geometriæ cultores verbis doctissimi Fermatii (a) *monitos velim, " ut, sepositis tantisper speciebus analyseos, problemata geometrica* viâ " Euclideanâ & Apollonianâ *exsequantur, ne pereat paulatim elegan-" tia & construendi & demonstrandi, cui præcipuè operam dedisse vete-" res innuunt satis &* Data Euclidis, & *alii a* Pappo *enumerati Ana-" lyseos libri."*

(a) Vid. Tom. 2. operum Mathem. Wallisii, p. 859.

Omissa & Emendanda.

Pag.	lin.	
80.	28.	*Lege,* Hyperbolâ, vel oppositis Hyperbolis terminetur, ducatur diameter per occursum rectarum, & per hanc Prop. erit utraque ipsarum parallela diametro huic conjugatæ, *Q. E. A.* Sin vero, *&c.* *Corollarium hoc fiat Cor. 4. Prop. 31.*
138.	20.	*Lege,* primæ rectæ eidem occurrit, simul cum, *&c.*
140.	30.	*Ad finem Cor. 2. addatur,* Vel, si sectio fuerit Parabola, erunt rectangula ista, ut latera recta diametrorum ductæ, & lateris trapezii.
141.	2.	*Lege,* rectæ MN, vel ut latus rectum diametri ipsius PM ad illud diametri rectæ MN.
142.	8.	*Lege,* ipsi AB, vel ut latus rectum diametri ipsius BC ad illud diametri rectæ AB.
179.	23.	*Lege,* ex MA simul, vel ipsorum excessu.

Erata: quorum ea quæ literâ t *notantur, Typographo; reliqua, Auctori imputanda.*

Pag. 4. lin. 7. lege, BCM, CMN æquales). *p. 12. l. 3. lege,* abscissam DR. *p. 16. l. 17. lege,* punctum L est in Parabola. *ibid. l. 28. lege,* erit punctum L in Parabola. *p. 21. l. 8. lege,* superficiem *t. p. 28. l. 29. lege,* triangula *t. p. 47. l. 26. lege,* oppositis. *p. 118. l. 7. dele,* & GN ipsi GM. *p. 120. l. 12. lege,* MG, GN *pro* FG, GH. *p. 121. l. 18. lege,* AM *pro* AB. *p. 123. l. 17. lege,* transversæ *t. p. 129. l. 8. lege,* 31 huj.) *p. 149. l. 2. lege,* punctumque C, dabitur. *p. 154. l. 12. lege,* dabitur *t. p. 166. l. 14. lege,* sint AHL. *p. 182. l. 3. lege* Ka *pro* KA. *ibid. l. 17. lege,* quadrato ex MA, æquale.

In Tab. IX. Fig. 6. ponatur *a* ad verticem axis superiorem. Tab. XI. Fig. 16. protrahatur GF ad E.

SECTIONUM CONICARUM

LIBER PRIMUS.

De Parabola.

DEFINITIONES.

SIT recta linea AB, & punctum extra ipsam C, & plano in quo sunt recta & punctum imponatur norma DEF, ita ut latus ipsius DE applicetur rectæ AB, alterum vero EF sit ad eas partes ipsius AB ad quas est C; & extremitati F lateris EF annectatur extremitas una fili FGC ejusdem longitudinis cum eo latere, altera vero fili extremitas in puncto C figatur; & adducatur pars fili FG ope paxilli G ad latus normæ EF, & juxta ipsum tendatur; dein moveatur normæ latus DE secundum rectam AB, & interea filum paxillo distentum semper lateri EF Fig. 1.

applicatum teneatur, motuque paxilli G describetur linea quædam, quæ *Parabola* dicitur. Poterit autem linea hæc ad distantiam a puncto C quavis data majorem extendi, sciz. si sumatur norma cujus lateris EF longitudo major sit ea distantia.

II. Recta autem AB *Directrix* dicitur.

III. Et punctum C Parabolæ *Focus*.

IV. Recta omnis directrici perpendicularis *Diameter* vocatur; punctumque in quo Parabolæ occurrit, *Diametri vertex*: diameter vero, quæ per focum transit, *Axis Parabolæ*; ejusque vertex, *Vertex principalis* dicitur.

V. Recta, quæ ad Parabolam utrinque terminata, a diametro aliqua bifariam secatur; *Ordinatim* diametro *applicata*, vel simpliciter *Ordinata* huic diametro vocatur.

VI. Recta, quæ quadrupla est segmenti diametri, quod inter verticem ipsius & directricem intercipitur, *Latus rectum*, sive *Parameter*, istius diametri dicitur.

VII. Recta linea, quæ Parabolæ in unico puncto occurrit, utrinque vero producta extra ipsam cadit, *contingere* Parabolam in eo puncto dicitur.

PROPOSITIO I.

Perpendicularis recta linea, a quovis Parabolæ puncto ad directricem ducta, æqualis est rectæ ab eodem ductæ ad focum.

FIG. 1. Sit enim punctum G in Parabola, & GE perpendicularis ad directricem AB, & ducatur GC ad focum C, sitque EF æqualis longitudini lateris normæ qua describitur Parabola: Est igitur EF æqualis longitudini fili FGC. Quare, ablata communi parte FG, erit EG æqualis ipsi GC.

COROLLARIUM. Hinc segmentum axis CB inter focum & directricem bifariam secatur in H vertice axis.

PROP. II.

Si distantia puncti alicujus a foco Parabolæ æqualis sit per-

perpendiculari ab eodem ductæ ad directricem, erit punctum illud in Parobola.

SIt Parabola, cujus directrix est AB, & focus C; sitque D punctum, cujus distantia DC a foco æqualis est perpendiculari DE ab eodem puncto ad directricem ductæ: Erit D in Parabola. Fig. 1. n. 2.

Centro C, intervallo CD, describatur circulus, axi occurrens in puncto F, sitque H vertex axis CB, ad quem ducatur normalis DK, quæ, si in foco C, vel infra focum, hoc est, ad partes ipsius oppositas iis ad quas est vertex, axi occurrat, liquet CD seu DE majorem fore CH: si vero DK occurrat axi supra focum, erit CD major quam CK; est autem DE æqualis KB, quare CD & DE simul majores sunt ipsa CB; & æquales inter se sunt CD, DE, ut & CH, HB: igitur & in hoc casu erit CD, hoc est CF, major CH: Ergo Parabola ad partes verticis H est intra circulum GDF; ideoque circulo necessario occurret, quoniam sciz. ad distantiam a foco quavis datâ majorem extendi potest: occurret vero circulo in puncto D; non enim, sed, si fieri potest, occurrat ei in alio puncto L, ad easdem partes axis ad quas est D; & juncta CL ducatur LM normalis ad directricem, & LN eidem parallela, quæ occurrat DE in N; & quoniam punctum L est in Parabola, erunt CL LM inter se æquales (1, hujus) & ex hypothesi æquales sunt CD DE, quarum CL, CD propter circulum æquales sunt; quare æqualis est LM, hoc est NE, ipsi DE: quod fieri non potest. Non occurrit igitur Parabola circulo in puncto L, neque in alio quovis præter D: Ergo est D punctum in Parabola.

PROP. III.

Puncti cujusvis intra Parabolam distantia a foco, minor est perpendiculari ducta ab eodem puncto ad directricem: distantia vero puncti cujusvis extra Parabolam, a foco, major est perpendiculari ducta ab eodem ad directricem.

SIt K punctum intra Parabolam, cujus directrix est AB, & focus C, non autem in axe, nam in eo casu res patet; & juncta Fig. 1.

KC, ducatur KL perpendicularis ad directricem: Erit KC minor KL.

Sit axis CB, & bifariam secetur angulus BCK rectâ CM, quæ directrici occurrat in M, & ipsi KL in P; & per M ducatur axi parallela MN; & quoniam anguli MCK, CMN simul minores sunt duobus rectis, (sunt enim simul æquales angulo BCK, propter alternos BCL, CLK æquales) convenient inter se MN, CK: conveniant in O; & quoniam æquales sunt anguli MCO, CMO, æquales erunt rectæ MO, OC, ideoque punctum O est in Parabola (2. huj.) Et in triangulo CLP est angulus CLP minor exteriore CPK, hoc est, minor angulo CMO seu OCM: quare angulus CLP multo minor est angulo OCL; ideoque, in triangulo KCL, latus KC minor est latere KL.

Sit jam punctum Q extra Parabolam, & juncta CQ occurrat Parabolæ in O, ductisque QR, OM normalibus ad directricem, quarum OM occurrat ipsi CR in S; erit angulus QRC, hoc est OSC, major angulo OMC seu OCM: quare angulus QRC multo major erit angulo QCR; & proinde latus QC majus erit latere QR.

Cor. 1. Hinc, Si distantia puncti alicujus a foco Parabolæ minor vel major fuerit perpendiculari ab eodem ducta ad directricem, erit punctum illud intra Parabolam in primo casu, & extra in altero.

Cor. 2. Ex demonstratione liquet, rectam quamlibet CK a foco ductam Parabolæ occurrere; quod ostendere oportuit in eo casu in quo punctum K est intra Parabolam.

PROP. IV.

Omnis recta perpendicularis ad directricem Parabolæ in unico puncto occurrit, & infra illud cadit intra Parabolam.

Fig. 1. Sit MT perpendicularis ad directricem AB, & ductâ MC ad focum, ducatur CO faciens angulum MCO æqualem ipsi CMO, & occurrens MT in O; æquales igitur sunt OM, OC, ideoque punctum O est in Parabola (2. hujus.) Sumatur autem in MO producta quodvis punctum T, & jungatur TC; & quoniam est angulus MCT major MCO, hoc est, angulo CMT, erit & TM major

major TC; punctum igitur T est intra Parabolam, (Cor. 1. 3. hujus.) Et eodem modo ostendetur punctum quodlibet supra O in recta MT, extra Parabolam esse.

PROP. V.

Si a puncto Parabolæ D, ducatur recta ad focum C, & perpendicularis DA ad directricem; recta DE angulum ab ipsis comprehensum bifariam secans continget Parabolam in puncto D: contingit etiam Parabolam recta quæ per verticem axis ipsi ad rectos angulos ducitur. Fig. 2.

1. Sumatur enim in DE aliud quodvis punctum F, & jungantur FA, FC, & AC, & ducatur FG perpendicularis ad directricem; & quoniam æquales sunt DA, DC (1. huj.) communis autem DE, & æquales anguli ADE, CDE; æquales erunt AE, CE, & anguli ad E recti: igitur & FC æqualis est FA (4. 1. Eucl.) & proinde major ipsa FG (19. 1.) Ergo punctum F est extra Parabolam (Cor. 1. 3. huj.) ipsamque proinde contingit recta DE in D (Def. 7.).

2. Sit HK recta per verticem axis, ipsique ad rectos angulos ducta, & sumatur in ipsa punctum K, a quo ducatur KL ad directricem perpendicularis, & jungatur KC; & quoniam est KC major CH (19. 1.) hoc est HB (Cor. 1. 1. huj.) hoc est KL; erit KC major KL, quare est K extra Parabolam, ipsamque contingit HK. Fig. 2.

Cor. Hinc patet quomodo ducenda sit recta, quæ Parabolam in dato ipsius puncto contingat; datis sc. positione directrice AB & foco C.

PROP. VI. PROBLEMA. I.

Datis positione directrice AB, & foco C Parabolæ, & recta MN diametris non parallela; huic parallelam ducere quæ Parabolam contingat. Fig. 2.

A Foco C ducatur CO perpendicularis ad MN, occurratque directrici in A, & bifariam secta AC in E, ducatur ED parallela ipsi MN, & diametro per A ductae occurrat in D: igitur juncta CD, erunt triangula ADE, CDE aequalia (4. 1.) & DA aequalis ipsi DC, angulusque ADE angulo CDE aequalis erit; ergo punctum D est in Parabola [2. hujus.] & recta DE ipsam contingit, per praecedentem.

PROP. VII.

Si a puncto Parabolae E, ducatur recta EG, neque parallela axi, neque bifariam secans angulum, diametro per punctum, & recta, ab eodem ad focum ducta, comprehensum; recta EG Parabolam in alio quodam puncto, non autem in pluribus secabit.

Fig. 3. 4. n. 1. 2. A Foco C ducatur perpendicularis ad rectam EG, occurratque directrici in A, & a puncto E ducatur EF axi parallela, & occurrens directrici in F, fiatque A*f* aequalis ipsi AF, & per *f* ducatur *fe* parallela FE, & occurrens EG in *e*; erit *e* ad Parabolam.

Fig. 3. *Casus* 1. Quando EG transit per focum C. Quoniam igitur EC, EF sunt inter se aequales, rectique sunt anguli ECA, EFA, erit AC aequalis AF, (5 & 6. 1.) igitur & ipsi A*f*; & anguli A*C*e, A*fe* recti sunt; ergo aequales sunt *e*C, *ef*, & punctum *e* erit ad Parabolam (2. hujus.)

Fig. 4. n. 1. 2. *Cas.* 2. Quando EG non transit per focum. Centro E, intervallo EC, describatur circulus, occurrens ipsi CA rursus in H, & per puncta C, H, *f* describatur alter circulus: quoniam igitur aequales sunt EC, EF, rectusque est angulus EFA; circulus centro E descriptus continget directricem in F (16. 3.); quare rectangulum CAH, aequale erit quadrato ex AF (36. 3.) hoc est quadrato ex A*f*; quare A*f* continget circulum *f*CH, (37. 3.); centrum vero hujus erit in *fe* (19. 3.) & etiam in GE, quoniam sciz. CH bifariam & ad rectos angulos secatur recta GE; & igitur centrum erit in ipsarum intersectione *e*; ergo aequales sunt *e*C, *ef*, & punctum *e* est ad Parabolam, per 2. hujus.

Et

Et manifestum est nullum esse ipsius EG punctum ad Parabolam præter puncta E, e. Nam si fuerit, sit ε; igitur circulus centro ε, intervallo εC descriptus, transibit per H, & directricem continget in puncto φ, propius aut remotius à puncto A, quam est punctum F aut f, & proinde quadratum ex φA, quod æquale est rectangulo CAH, esset propterea æquale quadrato ex FA. Quod est absurdum.

Cor. 1. A puncto Parabolæ duci potest tantum unica recta, quæ ipsam contingat; nam diameter per punctum transiens cadit intra Parabolam, (4. hujus.) alia vero quævis recta præter eam quæ bifariam secat angulum, diametro per punctum & rectâ ab eodem ad focum ductâ, comprehensum, Parabolæ rursus occurrit.

Cor. 2. Et quoniam ostensum est, rectas omnes Parabolam contingentes, extra ipsam cadere ad easdem ipsius partes, erit Parabola ad partes contingentium ubique convexa, & cava versus contrarias.

PROP. VIII.

Si a foco Parabolæ C ducatur ad rectam LG perpendicularis CG, quæ occurrat directrici in A, fueritque segmentum ductæ inter focum & rectam, non majus segmento ejusdem inter rectam & directricem; sc. si fuerit recta CG non major GA, recta LG Parabolæ necessario occurret. Fig. 4. n. 1. 2.

Cas. 1. Quando segmenta CG, GA sunt inter se æqualia; manifestum est ex demonstratione Prop. 6. rectam LG contingere Parabolam in puncto in quo diameter per A ipsi LG occurrit.

Cas. 2. Si vero CG minor fuerit ipsâ GA, sumatur GH, ipsi GC æqualis; & a puncto A versus utramvis partem, ponatur in directrice recta AF, vel Af, cujus quadratum æquale sit rectangulo CAH; & per puncta C, H, F, describatur circulus, & ducatur per F recta ipsi AF perpendicularis, quæ occurrat rectæ LG in E; & quoniam quadratum ex AF æquale est rectangulo CAH, continget

AF

AF circulum in F, igitur centrum ipsius erit in FE: & quoniam CH bifariam & ad angulos rectos secta est rectâ LG, erit idem centrum in recta LG; quare centrum erit in ipsarum FE, LG, intersectione E; æquales igitur sunt EC, EF, & punctum E est in Parabola. Similiter si ducatur *fe* perpendicularis directrici, & occurrens LG in *e*, erit *e* in Parabola.

Cor. Hinc quævis recta per punctum intra Parabolam transiens, ipsi occurret.

Cas. 1. Quando recta est diameter, jam demonstratum est ipsam Parabolæ occurrere, in Prop. 4. hujus.

Cas. 2. Quando recta non est diameter, sit recta LG transiens per punctum L, quod intra Parabolam est, & a foco C ducatur CG ad rectos angulos ipsi LG, occurrens directrici in A; & jungantur LC, LA; & quoniam est punctum L intra Parabolam, erit perpendicularis ab ipso ad directricem ducta major ipsâ LC, (Prop. 3. hujus) & igitur LA, quæ perpendiculari hac non est minor, erit major LC: quare AG major erit quam GC, (47. 1.) & proinde LG Parabolæ occurret, per hanc propositionem.

PROP. IX.

Fig. 5. Angulus ADC, qui comprehenditur diametro AD & rectâ DC a vertice ipsius ad focum ductâ, bifariam secatur rectâ DE, quæ contingit Parabolam in eodem vertice.

Nam si DE non bifariam secet angulum ADC, bifariam secetur aliâ rectâ, erit hæc etiam contingens. Quod est absurdum.

Cor. 1. Et contra, si sit AD diameter, & DE contingens in ipsius vertice, sintque anguli ADE, CDE æquales, transibit DC per focum: vel si transeat DC per focum, sitque DE contingens in D, & anguli ADE, CDE æquales; erit DA diameter.

Cor. 2. Et si a quovis Parabolæ puncto D, quod non sit vertex axis, ducatur recta DE Parabolam contingens; angulus EDA, quem cum diametro comprehendit, versus directricem, minor erit

rit angulo recto; nam angulus ADC, qui duplex est ipsius EDA, minor est duobus rectis.

PROP. X.

Si a puncto Parabolæ D, ducatur contingens DE, & perpendicularis ad axem DH; segmentum EH axis inter ipsas interceptum, bifariam secabitur in ipsius vertice F. Fig. 5.

DUcatur per D recta DA perpendicularis ad directricem, & DC ad focum, occurratque axis directrici in B; & quoniam angulus CDE, æqualis est angulo ADE, hoc est alterno CED, erunt CE, CD æquales; & igitur CE æqualis est (ipsi DA, hoc est) ipsi HB, & æquales sunt CF, FB, quare reliquæ FE, FH sunt æquales.

PROP. XI.

Omnis recta parallela contingenti, & utrinque Parabolâ terminata, bifariam secatur diametro, quæ per contactûs punctum transit, id est ordinatim erit diametro applicata.

REcta *Ee* quæ Parabolâ terminatur in E, *e*, parallela sit contingenti DK, & per contactûs punctum D, sit diameter AD ipsi *Ee* occurrens in L; erunt LE, *Le* æquales. Fig. 4. n. 1, 2.

Occurrat AD directrici AB in A, & a punctis E, *e*, ducantur ad directricem perpendiculares EF, *ef*, a foco vero C ducatur CA occurrens *Ee* in G, centroque E, distantiâ EC, describatur circulus, occurrens ipsi CA rursus in H, quique continget directricem in F, jungaturque DC; quoniam igitur æquales sunt DA, DC rectæ & anguli ADK, CDK, erit AC perpendicularis ad DK, (4. 1.) & igitur ad *Ee*; & quoniam E centrum est circuli CFH, æquales inter se erunt CG, GH, (3. 3.) & igitur junctæ *e*C, *e*H erunt æquales (4. 1.); quare circulus centro *e*, intervallo *e*C descriptus, transibit per H; & propter æquales *e*C, *ef*, transibit idem per *f*; quoniam vero contingit circulos recta *Ff*, eosdemque secat recta AHC, erit quadratum ex AF, æquale rectangulo CAH, (36. 3.)

(36. 3.) hoc est quadrato ex A*f*; æquales igitur sunt AF, A*f*, & parallelæ sunt, FE, AL, *fe*; ergo æquales sunt LE, L*e* (4. 6.)

Cor. 1. Et contra, si recta E*e* Parabolâ utrinque terminata, bifariam secta sit diametro AL; erit ipsa parallela contingenti quæ per D verticem diametri transit: nam si contingens per D non fuerit ipsi LE parallela, ducatur contingens ipsi parallela (6. hujus) & diameter quæ per punctum contactûs hujus contingentis transit, bifariam secabit E*e* per hanc propositionem; sed ex hypothesi eadem E*e* bifariam secta est diametro AL. Quod est absurdum.

Cor. 2. Omnes igitur ordinatim diametro cuivis applicatæ, sunt inter se parallelæ.

Cor. 3. Et si duæ vel plures rectæ parallelæ, Parabolâ terminentur, diameter quæ unam ex ipsis bifariam secat, bifariam secabit & reliquas; nam quæ bifariam secta est, parallela erit contingenti per verticem diametri, ergo & reliquæ eidem parallelæ erunt, & propterea diametro bifariam secabuntur.

Cor. 4. Et contra, recta quæ duas parallelas rectas, Parabolâ terminatas, bifariam secat est diameter; nam si non, diameter quæ unam ex parallelis bifariam secat, bifariam secabit alteram, & utraque bifariam secta est aliâ rectâ. Quod est absurdum.

Cor. 5. Et recta, quæ per verticem diametri parallela ducta est ordinatim diametro applicatis, Parabolam contingit. Patet ex Cor. 1.

PROP. XII.

Si a puncto Parabolæ, ducatur perpendicularis ad diametrum, eidemque ordinatim applicata; erit quadratum ex perpendiculari æquale rectangulo contento abscissâ, (id est segmento diametri inter ordinatim applicatam ipsiusque verticem, intercepto) & Axis latere recto, seu parametro.

Cas. 1. Quando diameter est axis.

Fig. 5. Sit punctum D, & DH perpendicularis axi BC, quæ parallela erit contingenti per verticem Axis (5. hujus.) ideoque ipsi ordinatim applicabitur (11. hujus.) & ducatur DC ad focum, &

& DA normalis directrici AB, sitque F vertex axis; quoniam igitur HB æqualis est DA, hoc est DC, erit quadratum ex HB, æquale quadrato ex DC, hoc est quadratis ex DH, HC; idem vero quadratum ex HB (propter BF, FC æquales) æquale est rectangulo HFB quater, una cum quadrato ex HC, (8. 2.); quare quadrata ex DH, HC simul æqualia sunt rectangulo HFB quater, una cum quadrato ex HC; igitur quadratum ex DH æquale est rectangulo HFB quater, hoc est, rectangulo contento abscissâ HF, & parametro axis (def. 6. hujus.).

Cas. 2. Quando diameter non est axis.

Sit EN perpendicularis diametro AD, & EL eidem ordinatim applicata, sitque D vertex diametri; erit quadratum ex EN æquale rectangulo contento abscissâ LD, & parametro axis. Fig. 4. n. 1. 2.

Ducatur DK parallela ipsi LE, quæ propterea continget Parabolam in D, (cor. 5. 11. hujus.) occurratque axi in K, sitque EF perpendicularis ducta ad directricem; & centro E, intervallo EF describatur circulus, qui continget directricem in F, & transibit per focum C; & juncta AC occurrat circulo rursus in H, & rectis DK, LE in P, G punctis; denique occurrat LE axi in O.

Quoniam igitur recti sunt anguli CPK, CBA, & communis BCP, erunt triangula CBA, CPK æquiangula; quare est AC ad CB, ut (CK ad CP, hoc est, propter parallelas, ut) OK ad GP, & igitur rectangulum CA in GP, æquale est rectangulo OK in CB: quoniam vero CA dupla est CP, & CH dupla CG; erit AH dupla GP; & propterea rectangulum CAH æquale erit rectangulo (CA in GP bis, hoc est rectangulo) OK in CB bis; quadratum vero ex EN, seu FA, propter circulum, æquale est rectangulo CAH, ergo quadratum ex EN æquale est rectangulo OK in CB bis, hoc est, rectangulo contento abscissâ LD, & parametro axis.

Cor. 1. Hinc quadrata ex perpendicularibus, a quibusvis Parabolæ punctis, ad quasvis diametros, sunt inter se ut abscissæ inter vertices diametrorum, & ordinatim applicatas, ab iisdem punctis eductas (1. 6.)

Cor. 2. Et quadrata ex ordinatim eidem diametro applicatis, sunt inter se, ut abscissæ inter ipsas & verticem diametri.

Sint enim EL, QR ordinatim applicatæ diametro DN, & EN, QS ad eandem perpendiculares; & propter æquiangula triangula

 ELN,

ELN, QRS, Erit quadratum ex EL ad quadratum ex QR, ut quadratum ex EN ad quadratum ex QS, hoc est ut abscissa DL ad abscissam DS (per præcedens Coroll.)

Cor. 3. Et si a verticibus duarum diametrorum ducantur ordinatim applicatæ ad diametros, erunt abscissæ inter ipsas & vertices, æquales inter se; quoniam scilicet perpendiculares ab iisdem verticibus ad diametros sunt æquales.

PROP. XIII.

Si a puncto Parabolæ ducatur ad diametrum recta eidem ordinatim applicata, erit quadratum ex ducta æquale rectangulo contento abscissâ inter ipsam & verticem diametri, & latere recto sive parametro diametri.

Fig. 4. Pan. I. 2. Sit AB Parabolæ directrix, & AD diameter, cui a puncto Parabolæ E ordinatim applicata ducta sit EL, quæ axi occurrat in O; &, per verticem diametri D, ducatur DK parallela EL, quæ idcirco Parabolam continget; & ad axem ducatur DM perpendicularis: a vertice vero axis Q ducatur QR, ordinatim applicata diametro DL, & propterea parallela ipsi EL.

Quoniam igitur QR æqualis est rectæ DK, erit quadratum ex QR æquale quadratis ex DM, MK, (47. 1.) Quadratum vero ex DM, per casum primum præcedentis, æquale est rectangulo MQB quater; & quadratum ex MK, propter æquales MQ, QK, (10. huj.) æquale est quadrato ex MQ quater: quare quadratum ex QR æquale est rectangulo MQB quater, & quadrato ex MQ quater, hoc est, (3. 2.) rectangulo QMB quater: est autem MQ seu QK æqualis ipsi DR, & MB ipsi DA; quare quadratum ex QR æquale est rectangulo RDA quater: & quoniam ordinatim applicatæ sunt QR, EL diametro AD, erit, per Cor. 2. præcedentis, quadratum ex QR ad quadratum ex EL, ut (RD ad LD, hoc est, ut) RDA quater ad LDA quater; & ostensum fuit quadratum ex QR æquale esse rectangulo RDA quater: Ergo quadratum ex EL æquale est rectangulo LDA quater, hoc est, rectangulo contento abscissâ LD & parametro diametri AD. Et propterea lineam hanc Apollonius *Parabolam* nominavit.

Cor.

Cor. 1. Si a puncto E ducatur EL ad Parabolæ diametrum AD, parallela eidem ordinatim applicatis, ipsique occurrens infra verticem ejus D, fueritque quadratum ex EL æquale rectangulo contento abscissâ LD & parametro diametri; erit punctum E in Parabola.

Nam quoniam punctum L est intra Parabolam, (4. huj.) recta EL ipsi necessario occurret (Cor. 8. huj.) Si igitur non occurrit ei in puncto E, ad partes diametri sciz. ad quas est E, occurrat si fieri potest in alio puncto, propiore aut remotiore a diametro, quam est E, ut in ε; & erit quadratum ex εL æquale rectangulo LD in parametrum diametri, hoc est, ex hypothesi, quadrato ex EL: quod est absurdum. Fig. 4. n. 2.

Cor. 2. Et si a duobus punctis E, Q, quorum unum Q in Parabola fuerit, ducantur ad diametrum AD rectæ EL, QR, parallelæ ordinatim eidem diametro applicatis; fuerintque quadrata ex ductis inter se, ut abscissæ inter ipsas & verticem diametri: erit etiam alterum punctum E in Parabola.

Occurrat enim diameter LD directrici in A, eritque AD quater latus rectum ipsius LD; & quoniam est quadratum ex QR ad quadratum ex EL, ut (RD ad LD, hoc est, ut) RDA quater ad LDA quater, sitque per hanc propositionem quadratum ex QR æquale rectangulo RDA quater, erit quadratum ex EL æquale ipsi LDA quater; & proinde est punctum E in Parabola per Cor. præcedens.

PROP. XIV.

Si a puncto Parabolæ A ducatur AC, ordinatim applicata diametro BC, & contingens AD, eidem diametro occurrens in D; segmentum diametri, inter ordinatim applicatam & contingentem, bifariam secabitur in vertice B diametri. Fig. 6.

Ducatur enim a vertice B, ordinatim applicata BE diametro per A, eritque abscissa BC æqualis abscissæ AE (Cor. 3. 11. huj.) hoc est, ipsi BD.

Cor. Et contra: Si AC sit ordinatim applicata diametro BC, & ducatur AD faciens BD æqualem ipsi BC; contingit AD Parabolam.

Nam

Nam si non contingit AD, contingat AF; igitur æquales erunt FB BC: quod fieri non potest.

PROP. XV. PROBL.

Parabolæ positione datæ, diametrum, axem, ejusque latus rectum & focum invenire.

FIG. 7. DUcantur duæ rectæ parallelæ AB, CD, Parabolâ terminatæ; secenturque bifariam in E, F punctis; & juncta EF Parabolæ occurrat in G: erit GF ipsius diameter per Cor. 4. Prop. 11. huj.

Sumpto vero quovis puncto H in diametro infra verticem G, per ipsum ducatur KHL diametro ad rectos angulos, & Parabolæ in punctis K, L occurrens; & per M, medium sciz. ipsius KL punctum, ducatur MN diametro GH parallela, Parabolæ occurrens in N; sitque NO ducta ipsi MH parallela; & quoniam est MN parallela GH, erit MN diameter: ipsi vero ordinatim applicata est KL; quare NO Parabolam contingit in N (Cor. 5. 11. huj.) Et quoniam rectus est angulus MNO, erit MN axis per Cor. 2. Prop. 9. huj. Tertia autem proportionalis ipsis NM, MK, erit axis latus rectum, (13. huj.) Distantia vero foci a vertice axis æqualis est quartæ parti lateris recti, (Def. 6. & Cor. Prop. 1. huj.) Quare focus dabitur. Et similiter inveniri poterit directrix.

PROP. XVI. PROBL.

Datâ positione directrice Parabolæ, & foco; ipsam describere.

FIG. 8. SIt AB directrix, & C focus, & ope normæ & fili describatur Parabola, ut in Definitione prima. Vel Parabolæ quotlibet puncta inveniri poterunt hoc modo: Per focum C ducatur directrici ad rectos angulos CB; erit CB axis: cui ad rectos angulos ducatur quævis DG, & ponatur in axe recta CH, æqualis ipsi BG; centroque C, intervallo CH, describatur circulus, rectam DG secans in punctis D, *d*; erunt ipsa in Parabola.

Nam ductâ DA ad directricem, parallelâ ipsi GB, erit DA æqualis BG, hoc est, CH seu CD; & igitur est D in Parabola, (Prop. 2. huj.) eodem modo, erit *d* in eadem.

COR.

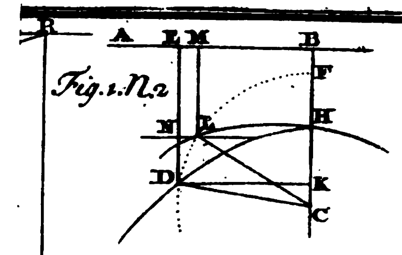


Fig. 1. N. 2

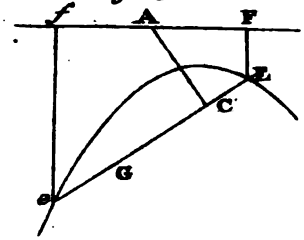


Fig. 3.

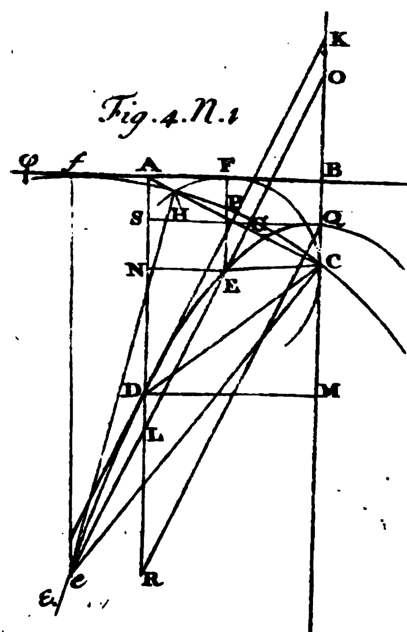


Fig. 4. N. 1

t. pag. 14.

Cor. Hinc, si detur positione directrix AB, & vertex axis, punctum scil. F; describi poterit Parabola, ducendo FB directrici ad rectos angulos, & faciendo FC æqualem ipsi FB; erit enim C focus.

Similiter, si vertex F & focus C dentur; jungatur CF, & producatur ad B, ut sit FB æqualis FC, & perpendicularis ad BC per B ducta erit directrix: si verò detur axis GF positione, ipsiusque vertex F, & parameter FK, invenietur directrix faciendo FB æqualem quartæ parti parametri FK, & ducendo BA ad rectos angulos ipsi FB. Similiter inveniri poterit directrix ex dato positione axe, foco, & parametro axis. Igitur in his casibus describi poterit Parabola, ut in Propositione hac.

PROP. XVII. PROBL.

Dato positione axe FH, ipsiusque vertice F, & puncto D extra axem, & infra verticem; Parabolam describere, quæ per punctum transeat.

Ducatur ad axem a puncto D recta DG axi perpendicularis, & duabus FG, GD, inveniatur tertia proportionalis FK, cujus quartæ parti sumatur æqualis FB, ipsique FB fiat æqualis FC, & ducatur BA ipsi DG parallela; & describatur Parabola cujus focus sit C, & directrix AB; transibit hæc per punctum D. Nam quoniam proportionales sunt FG, GD, FK, erit quadratum ex GD æquale rectangulo GFK, & est FK parameter diametri FG, quare punctum D est in Parabola, per Cor 1. Prop. 13. huj. Fig. 8.

PROP. XVIII. PROBL.

Datis positione duabus rectis AB, AC, sibi mutuo occurrentibus in A, & rectâ DE magnitudine datâ; Parabolam describere cujus diameter sit AB, ipsiusque parameter DE, quamque contingat recta AC in A. Fig. 9.

Sumatur ipsius DE quarta pars DF, cui in BA producta ponatur æqualis AG, & ducatur GH ipsi AG ad rectos angulos; fiatque angulus CAK æqualis angulo GAC, & recta AK æqualis ipsi AG; tum describatur Parabola foco K, & directrice GH; erit

AB

AB una ex diametris, hujusque latus rectum æquale erit quadruplicatæ AG (Deff. 4. 6. hujus), hoc est ipsi DE, & propter angulos GAC, CAK æquales, continget Parabolam recta AC in A.

PROP. XIX. PROBL.

FIG. 9. Datis positione diametro AB, ipsiusque vertice A, & recta LM diametro occurrente in M infra verticem, positione & magnitudine datâ; Parabolam describere quæ transeat per punctum L, & in qua recta LM ordinatim applicata sit diametro AB.

PEr verticem A, ducatur AC parallela ipsi LM, & ipsis AM, ML tertia proportionalis sit DE; & per præcedentem describatur Parabola cujus diameter sit AB, ipsiusque Parameter DE, quamque recta AC in A contingat; & quoniam ML ipsi AC est parallela, erit ML ordinatim applicata diametro AB; & quoniam AM, ML, DE sunt proportionales, erit quadratum ex ML æquale rectangulo contento AM & DE parametro scil. diametri AB; quare punctum M est in Parabola. (Cor. 1. 13. huj.)

Cor. Hinc si a puncto L ducatur LM ad rectam AB positione datam, in angulo dato LMA; fueritque quadratum ex ducta æquale rectangulo contento abscissâ MA inter ductam & datum punctum A, & datâ rectâ DE, tanget punctum L Parabolam positione datam. Ducatur enim per A recta AC ipsi LM parallela, & describatur per 18. propositionem præcedentem, Parabola cujus diameter sit AB, ipsiusque parameter DE, quamque contingat AC in A; erit hæc locus punctorum L; nam quoniam ex hypothesi, est quadratum ex LM æquale rectangulo contento MA & DE, & est LM parallela contingenti AC, & propterea ordinatim applicatis diametro MA, erit punctum M in Parabola; Cor. 1. Prop. 13. hujus.

PROP. XX. PROBL.

Datis positione, Parabolæ diametro, ipsiusque vertice; & di-

diametri latere recto magnitudine dato, & puncto in ipsa dato; Parabolam describere.

SIt AB diameter, ejusque vertex A; & in AB ponatur supra verticem recta AC æqualis lateri recto dato, datumque in Parabola sit punctum D: Et factum puta, sciz. sit AC Parabola describenda, quam in A contingat recta AE occurrens diametro per D ductæ in E, & compleatur parallelogrammum AEDF; igitur DF ordinatim applicatur diametro AB, quare quadratum ex DF, seu AE æquale erit rectangulo FAC; ut igitur FA, seu DE ad AE, ita est AE ad AC, & sunt circa æquales angulos DEA, EAC, alterni enim sunt; quare æquiangula sunt triangula DEA, EAC, angulusque AEC æqualis erit angulo EDA seu FAD; datus autem est FAD, propter AF, AD positione datas (26. Dat.) quare datus est angulus AEC, & datur AC positione & magnitudine, tangit proinde punctum E circumferentiam positione datam, circuli sciz. cujus segmentum super AC descriptum, capit angulum æqualem ipsi FAD, (Conversf. 21. 3.); idem vero punctum E tangit rectam positione datam DE; datum igitur est punctum E, & datur A punctum, quare AE recta positione datur; ergo describi potest Parabola cujus diameter est AB, ejusque vertex A, & parameter AC, quamque contingit AE; per Prop. 18. præcedentem. FIG. 10.

Quoniam vero ad compositionem requiritur, ut super AC describatur circuli segmentum capiens angulum æqualem ipsi FAD, & ut ejus circumferentiæ occurrat recta quæ per D ducitur ipsi AB parallela, quod non semper fieri potest, ideo & problema non in omni casu solvi poterit; fiet autem modo singulari (id est unica erit problematis solutio) si recta per D ipsi AB parallela contingat circumferentiam.

Determinatur autem Parabola, & latus rectum diametri AB quæ hoc efficient, si inveniatur Parabola cujus diameter sit AB, ejusque vertex A, quæque transit per punctum D, fueritque latus rectum ipsius AB tale, ut super illud, in AB supra A positum, descripto circuli segmento, quod capiat angulum ipsi BAD æqualem; hujus circumferentiam contingat recta parallela ipsi AB per D ducta; puta factum; sitque AG parameter diametri AB, super quam sciz. descripto segmento circuli, quod capit angulum ipsi BAD seu ADE æqualem, ipsius circumferentiam contingat DE ipsi AB parallela

in H; & AH, GH jungantur; quoniam igitur angulus AHD æqualis est angulo AGH in segmento opposito (32. 3.) & est angulus ADH, ex hypothesi, æqualis ipsi AHG, æquiangula erunt ADH, AHG triangula, & igitur angulus DAH æqualis est angulo HAG; datus autem est DAG angulus, quare ipsius dimidium DAH datur; & data est recta AD positione, igitur & AH positione datur (29. Dat.) & punctum H quo occurrit positione datæ DE; & datur AHG angulus, quare positione datur HG, (29. Dat.) & ideo punctum G; & recta AG propterea magnitudine datur; & quoniam est AG latus rectum diametri AB, cujus vertex A, in Parabola quæ transit per punctum D; ostensum vero fuit in præmissis, contingentem Parabolam in vertice diametri, occurrere diametro per D in circumferentia circuli, cujus segmentum super latus rectum diametri per A descriptum, capit angulum æqualem ipsi ADH, diameter autem DE occurrit circumferentiæ huic in H; ideo continget HA Parabolam in A, datis vero positione rectis AB, AH, & AG magnitudine, describi potest Parabola per propositionem 18. hujus.

Componetur vero hoc ultimum ita: jungatur AD, & per D ducta DE ipsi AB parallela, ducatur ad ipsam recta AH, bifariam secans angulum DAG, & per H ducatur ad AB recta HG faciens angulum AHG æqualem ipsi ADH seu DAB; & diametro AB, latere recto AG, describatur Parabola, quam contingat recta AH in A (Prop. 18. hujus); transibit hæc per D, & circulum circa AHG descriptum continget DH. Ducatur enim DK ipsi AH parallela, & quoniam propter æquiangula triangula DAH, AHG, proportionales sunt DH, HA, AG, hoc est KA, KD, AG, erit quadratum ex DK æquale rectangulo KAG; & est DK parallela contingenti AH, quare punctum D est in Parabola (Cor. 1. Prop. 13. hujus); & quoniam angulus AHD æqualis est angulo AGH in opposito segmento, continget DH circulum in H. (Convers. 32. 3.)

Proxime inquirendum est an major vel minor sit parameter AG parametro diametri AB in quavis alia Parabola, in qua est AB diameter, ejusque vertex A, quæque transit per D punctum. Sit alia quævis ejusmodi Parabola, ipsamque in A contingat AE, quæ diametro per D occurrat in E, circulo vero GHA in L; & ducatur EG parallela junctæ LG, DF vero ducatur parallela ipsi EA; ordinatim

dinatim igitur applicata est DF diametro AB, & quoniam angulus ADE æqualis est angulo AHG, seu ALG, hoc est angulo AEC, & æquales sunt anguli DEA, EAC, æquiangula erunt EDA, AEC triangula, quare proportionales sunt DE, EA, AC, hoc est AF, FD, AC, igitur quadratum ex DF æquale est rectangulo FAC, & propterea est AC parameter diametri AB in hac Parabola: & quoniam DE contingit circulum in H, erit AL minor AE, ergo & AG minor est AC; quare AG minima est parameter diametri AB in Parabolis prædictis. Et similiter ostendetur parametros diametri AB in Parabolis, quas contingunt rectæ per A ductæ, remotiores a contingente AH, ad utrasque ejus partes, semper majores esse parametris in Parabolis, quas contingunt rectæ ipsi AH propiores.

Componetur vero problema primo propositum ita: Inventâ rectâ AG, ut in præmissis ostensum fuit, si parameter proposita, ipsi AG fuerit æqualis, Parabola describetur ut dictum est, & ea sola problemati satisfaciet; si vero parameter proposita minor fuerit rectâ AG, problema non poterit construi; quod si parameter proposita sciz. AC major sit ipsa AG; super AC describatur segmentum circuli capiens angulum æqualem ipsi ADH seu DAB, & quoniam DH contingit circulum AHG, necessario secabit segmentum super AC descriptum in duobus punctis, quorum alterutrum sit E, & AE jungatur; & diametro AB, contingente AE, & parametro AC describatur Parabola (Prop. 18. hujus), & ducatur DF ipsi AE parallela, & ostendetur ut antea proportionales esse DE, EA, AC, hoc est AF, FD, AC, & proinde quadratum ex DF æquale esse rectangulo FAC, contento abscissâ FA & parametro AC, & propterea Parabolam transire per punctum D. Idem vero demonstrabitur de altera Parabola, quam contingit recta per A, & reliquum intersectionis punctum *e* ducta. Quoniam vero in præmissis ostensum fuit æquales esse GAH, HAD angulos, æquales erunt AKD, ADK, & igitur æqualis est AK ipsi AD; est autem AG tertia proportionalis ipsis AK, KD, seu ipsis AD, DK, hoc est, parameter minima est tertia proportionalis rectæ, quæ jungit verticem diametri positione datæ, cum puncto dato, & ei quæ ab eodem puncto ad diametrum ducitur, abscindens segmentum æquale primæ proportionali.

Apollonii Pergæi Conicorum Libri Primi Definitiones primæ novem.

Ap. Def.
1. VIII. SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non est in eodem plano in quo punctum, juncta recta linea in utramque partem producatur, & manente puncto convertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat a quo cœpit moveri; superficiem a recta descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, (nimirum rectâ quæ eam describit in infinitum productâ) voco *Conicam superficiem*.

2. IX. *Verticem* vero ejus, manens punctum.

3. X. *Axem* autem, rectam lineam quæ per punctum & centrum circuli ducitur.

4. XI. *Conum* vero voco, figuram contentam circulo & conica superficie, quæ inter verticem & circuli circumferentiam interjicitur.

5. XII. *Verticem* autem *coni*, punctum quod & superficiei conicæ vertex est.

6. XIII. *Axem* vero, rectam lineam quæ a vertice ad circuli centrum ducitur.

7. XIV. *Basim* autem, circulum ipsum.

8. XV. *Rectos* quidem *conos* voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

9. XVI. *Scalenos* vero, qui axes non ad rectos angulos ipsis basibus habent.

P R O P. XXI. *Quæ Prima est lib.* 1. *Apollonii.*

Rectæ lineæ, quæ a vertice superficiei conicæ, ad puncta quæ in superficie sunt, ducuntur, in ipsa superficie erunt.

FIG. 11. SIt superficies conica, cujus vertex A, & sumpto in superficie conica aliquo puncto B, jungatur recta ACB; recta ACB in superficie erit.

Si enim fieri potest, non sit in superficie, & recta, quæ superficiem

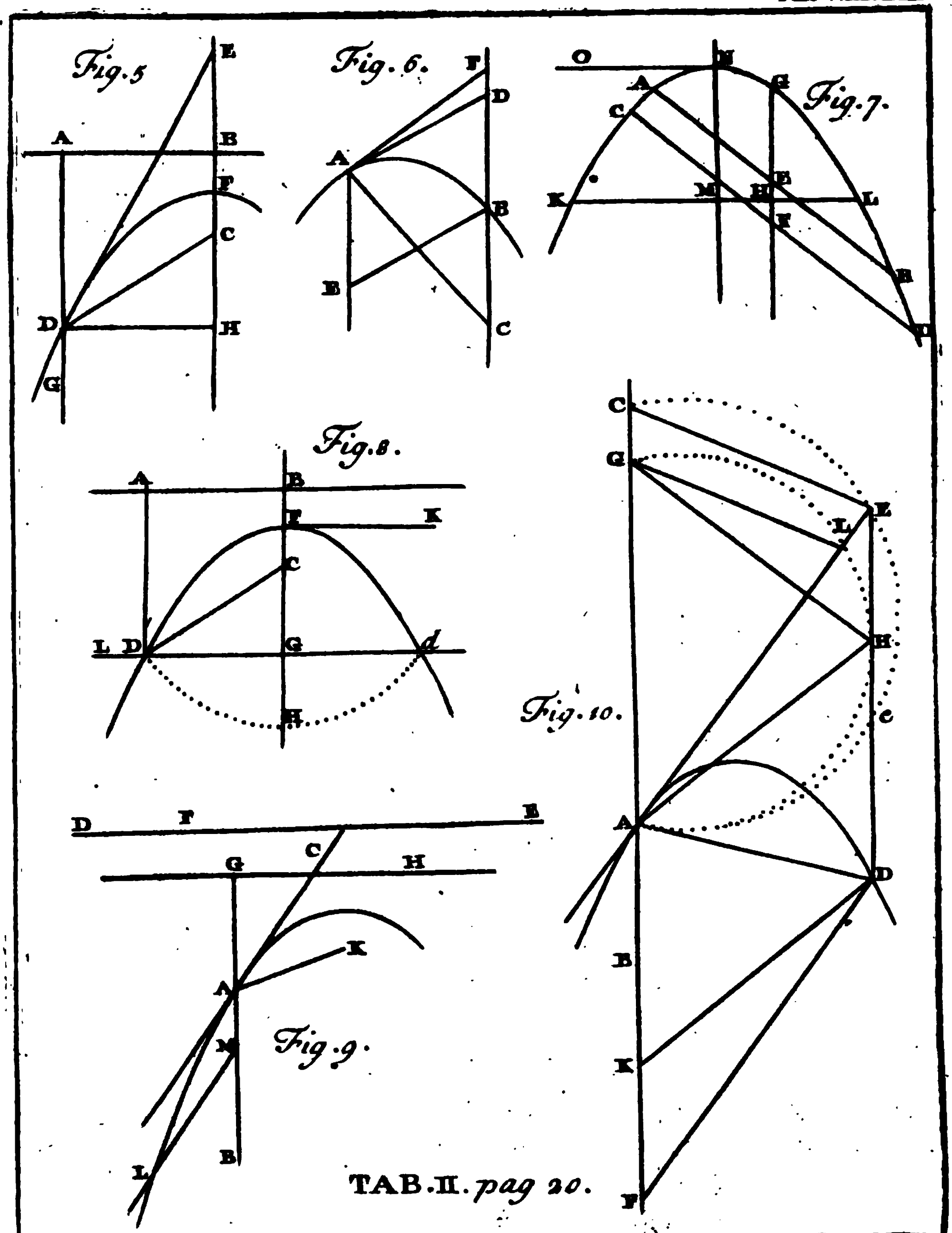


Fig. 5
A B E F C D H G
Fig. 6.
F D A B E C
Fig. 7.
O N G A C K M H E F L B D
Fig. 8.
A B F K C L D G d H
Fig. 9.
D F E C G H K A M L B
Fig. 10.
C G E L H e A D B K F

TAB. II. pag 20.

ciem describit, sit DE; circulus autem, in quo ipsa DE fertur, sit EF. Itaque, si manente A, feratur DE in circuli EF circumferentia; per B punctum transibit, atque erunt duarum rectarum sciz. ACB, AGB iidem termini: quod est absurdum. Non igitur a puncto A ad B ducta recta extra superficiem est: ergo in ipsa superficie erit.

Cor. Et constat, si a vertice ad aliquod punctum eorum, quæ intra supercfiiem sunt, recta ducatur, illam intra superficiem conicam; & si ad aliquod eorum quæ sunt extra, extra superficiem cadere.

PROP. XXII. *Tertia lib.* 1. *Apollonii.*

Si conus plano per verticem secetur, sectio triangulum erit.

Sit conus cujus vertex A, basis autem circulus BDC, & per A secetur plano aliquo quod sectiones faciat in superficie lineas quidem AB, AC, & in basi rectam BC, (3. 11.): dico ABC triangulum esse. Fig. 12.

Quoniam enim recta linea, quæ in plano secanti ducitur a puncto A ad punctum B, est etiam in superficie conica per præcedentem; eadem erit communis sectio plani secantis & superficiei conicæ; sectio igitur AB est recta linea; eadem ratione est sectio AC recta; est autem & BC recta: quare ABC est triangulum.

PROP. XXIII. *Quarta lib.* 1. *Apollonii.*

Si alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, plano secetur æquidistante circulo, per quem fertur recta superficiem describens: planum, quod superficie concluditur, circulus erit centrum in axe habens; figura vero contenta circulo, & ea parte superficiei conicæ quæ inter secans planum & verticem interjicitur, conus erit.

Sit conica superficies, cujus vertex A, circulus autem, in qua fertur recta superficiem describens, sit BC, & secetur plano quovis ipsi circulo BC æquidistante, atque sectionem faciat in superficie Fig. 13.

lineam

lineam DLE: dico lineam DLE esse circulum qui centrum in axe habet.

Sumatur enim centrum circuli BC, quod sit F, & AF jungatur: axis igitur (Def. 10. huj.) est AF, & occurrit plano secanti; occurrat in G, & per rectum AF planum aliquod ducatur: erit igitur (per 22. huj.) sectio triangulum ABC. Et quoniam puncta D, G, E sunt & in plano secante DLE, & in ipso ABC plano, DGE erit (3. 11.) linea recta. Sumatur autem, in ipsa DLE linea, punctum aliquod H, & juncta AH producatur; occurret igitur circumferentiæ BC; occurrat in K, junganturque GH, FK. Et quoniam duo plana parallela DLE, BC plano ABC secantur, communes ipsorum sectiones (16. 11.) parallelæ erunt: parallela est igitur DE ipsi BC. Et eadem ratione GH est parallela ipsi FK; quare (4. 6.) ut AF ad AG, ita FB ad GD, FC ad GE, & FK ad GH; suntque tres rectæ BF, KF, CF æquales inter se: ergo (14. 5.) & ipsæ tres DG, GH, GE inter se æquales erunt. Similiter quoque ostendentur æquales quæcunque a puncto G ad lineam DLE ducuntur. Linea igitur DLE est circulus, centrum G in axe habens.

Cor. Constat figuram contentam circulo DLE, & ea parte superficiei conicæ quæ inter dictum circulum & punctum A interjicitur, conum esse. Simulque demonstratum est, communem sectionem plani secantis & trianguli per axem, diametrum esse ipsius circuli.

PROP. XXIV. *Quinta lib. 1. Apollonii.*

Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi, seceturque altero plano ad triangulum per axem recto, quod ex verticis parte triangulum abscindat simile ei quod per axem; subcontrarie vero positum: sectio circulus erit. Vocetur autem hujusmodi sectio *Subcontraria*.

Fig. 14. Sit conus scalenus, cujus vertex A punctum, basis circulus BC, & secetur plano per axem ad circulum BC recto, atque faciat sectionem triangulum ABC; secetur autem & altero plano ad rectos angulos ipsi ABC, quod ex parte A triangulum abscindat AGK trian-

triangulo ABC ſimile, ſubcontrarie vero poſitum; ut videlicet angulus AKG æqualis ſit ABC angulo, & faciat ſectionem in ſuperficie lineam GKH: dico ipſam GHK circulum eſſe.

Sumantur enim in lineis GHK, BC puncta quædam H, L, a quibus ad planum trianguli ABC, perpendiculares ducantur; cadent hæ (38. 11.) in communes planorum ſectiones; cadant, ut HF, LM: parallela eſt igitur (6. 11.) HF ipſi LM. Ducatur autem per F ipſi BC parallela DFE; eſt vero & FH ipſi LM parallela: ergo (15. 11.) planum quod per FH, DE tranſit, æquidiſtans eſt baſi ipſius coni; & idcirco (23. huj.) ſectio DHE circulus erit, cujus diameter DE: æquale eſt igitur rectangulum contentum DF, FE quadrato ex FH. Et quoniam parallela eſt ED ipſi BC, angulus ADE æqualis eſt angulo ABC, & ponitur angulus AKG angulo ABC æqualis: ergo & AKG ipſi ADE æqualis erit. Sunt autem qui ad F anguli æquales, ſunt enim ad verticem: igitur DFG triangulum ſimile eſt triangulo KFE. Igitur ut EF ad FK, ita GF ad FD: rectangulum igitur EFD æquale eſt rectangulo KFG. Sed rectangulum EFD (hoc eſt, contentum DF, FE) demonſtratum eſt æquale quadrato ex FH: ergo & rectangulum contentum KF, FG eidem æquale erit. Similiter demonſtrabuntur & omnes, quæ a linea GHK ad ipſam GK perpendiculares ducuntur, poſſe æquale ei quod ſegmentis ipſius GK continetur. Sectio igitur circulus eſt, cujus diameter eſt GK, (per Lemma 2. Pappi Alexandrini, in lib. 1. Apollonii, quod vide ad finem hujus libri.)

PROP. XXV.

Si conus plano per axem ſecetur, ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam quæ ad baſim trianguli per axem eſt perpendicularis, & ſit communis ſectio trianguli per axem & plani ſecantis parallela uni laterum trianguli per axem: linea quæ communis eſt ſectio plani ſecantis & ſuperficiei conicæ, erit Parabola, diametrum habens rectam quæ communis eſt ſectio trianguli per axem & plani ſecantis.

Sit

FIG. 15. SIt conus, cujus vertex punctum A, basis BC circulus, seceturque plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ABC, & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam DE, quæ ad BC est perpendicularis, & faciat sectionem in superficie coni DFE lineam; sit autem FG communis sciz. sectio trianguli per axem & plani secantis parallela uni laterum trianguli per axem, videlicet ipsi AC: erit linea DFE Parabola, & FG una ex ipsius diametris.

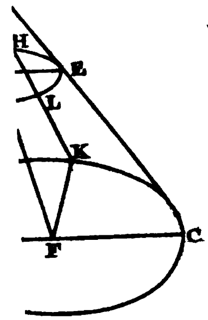
Sumatur enim in sectione DFE quodlibet punctum H, & per H ducatur HK ipsi DE parallela, usque ad FG; per K autem ducatur ipsi BC parallela LM: est igitur (15. 11.) planum quod transit per HK, LM, plano per DE, BC, hoc est, ipsi basi coni æquidistans: ideoque (per 23. huj.) planum per HK, LM est circulus, cujus diameter LM. Est autem (per 10. 11.) HK ad LM perpendicularis, quia & DE ad BC: rectangulum igitur LKM æquale est quadrato ex HK (35. 3.), & similiter est BGC rectangulum æquale quadrato ex DG: est igitur quadratum ex DG ad quadratum ex HK, ut rectangulum BGC ad rectangulum LKM, hoc est, propter æquales GC, KM, ut BG ad LK, hoc est, ut GF ad KF; quare quadratum ex DG est ad quadratum ex HK, ut recta GF ad rectam KF: describatur igitur (per 19. huj.) Parabola cujus diameter est GF, ipsiusque vertex F, & in qua DG ordinatim applicata sit ipsi GF: & quoniam punctum D est ex constructione in hac Parabola, erit punctum H in eadem, per Cor 2. 13. huj. Et similiter ostendetur omnia sectionis DFE puncta in eadem esse. *Q. E. D.*

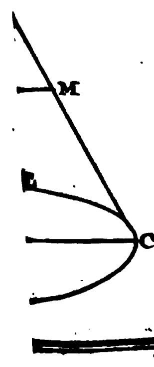
Pappi Alexandrini Lemma II. *in lib.* I. *Conicorum Apollonii.*

FIG. 16. Sit linea ABC, & positione data AC; omnes autem, quæ ab ipsa linea ad AC perpendiculares ducuntur, ita se habeant, ut quadratum uniuscujusque ipsarum æquale sit rectangulo contento basis segmentis, quæ ab ipsis secantur: dico ABC circuli circumferentiam esse, diametrum autem ipsius rectam AC.

DUcantur enim a punctis D, B, E perpendiculares DF, BG, EH: ergo quadratum ex DF æquale est rectangulo AFC, &

Fig. 13.





& quadratum ex BG rectangulo AGC, ipsum vero ex EH quadratum rectangulo AHC æquale. Secetur AC bifariam in K, & KD, KB, KE jungantur. Itaque, quoniam AFC rectangulum, unà cum quadrato ex FK, est æquale (per 5. 2.) quadrato ex AK; & ipsi AFC æquale est (ex hyp.) quadratum ex DF: erit quadratum ex DF, unà cum quadrato ex ipsa FK, hoc est (per 47. 1.) quadratum ex DK, æquale quadrato ex AK; quare AK ipsi KD est æqualis. Similiter ostendemus & unamquamque rectarum BK, EK ipsi AK vel KC æqualem esse: ergo ABC circumferentia est circuli, cujus centrum K, hoc est, circa diametrum AC descripti.

SECTI-

SECTIONUM CONICARUM

LIBER SECUNDUS.

De Ellipsi.

DEFINITIONES.

I. SI in plano quovis sumantur duo puncta D, E, & in ipsis figantur extremitates fili, cujus longitudo major sit distantiâ punctorum, atque ope paxilli H tendatur filum, & circumducatur paxillus a puncto H, quousque ad eum locum redeat a quo cœpit moveri, tenso semper manente filo; linea quæ a paxillo interea describitur *Ellipsis* dicitur.

II. Puncta D, E dicuntur *Foci*.

III. Et punctum C, quod rectam inter focos bifariam secat, *Centrum Ellipseos*.

IV. Quævis recta per centrum transiens, & utrinque ab Ellipsi terminata, *Diameter* vocatur; & puncta in quibus Ellipsi occurrit, ipsius *Vertices*.

V. Dia-

V. Diameter autem, quæ per focos transit, *Axis major.*

VI. Et diameter, quæ ad angulos rectos est axi majori, *Axis minor* dicitur.

VII. Duæ diametri, quarum utraque bifariam secat omnes rectas in Ellipsi alteri parallelas, vocantur *Diametri conjugatæ.*

VIII. Recta quævis, per centrum non transiens, Ellipsi vero utrinque terminata, & a diametro bifariam secta, *Ordinatim diametro applicata*, vel simpliciter, *Ordinata* diametro huic, dicitur: & etiam diameter quæ parallela est rectæ, quæ ordinatim diametro alteri applicatur, huic *ordinatim applicari* dicitur.

IX. Tertia proportionalis duabus diametris conjugatis, *Latus rectum*, sive *Parameter* vocatur ejus diametri, quæ est prima trium proportionalium.

X. Recta, quæ in unico puncto Ellipsi occurrit, ipsam in eo puncto *contingere* dicitur.

PROP. I.

Si a puncto H in Ellipsi, ducantur ad focos duæ rectæ HD, HE, erunt ipsæ simul æquales axi majori AB. Fig. 1.

Quoniam H est punctum in Ellipsi, erunt HD, HE simul æquales longitudini fili, quo describitur; & quoniam puncta A, B sunt etiam in Ellipsi, erunt tum DA & EA simul, tum EB, DB simul æquales eidem longitudini: quare & inter se æquales erunt. Auferatur communis DE, & reliqua sciz. AD bis, æqualis erit reliquæ EB bis; quare AD æqualis est ipsi EB. Addatur communis AE, & erit AD, unà cum AE, æqualis ipsi AB axi majori: sed AD & AE simul æquales sunt longitudini fili, hoc est, ipsis HD, HE simul; quare HD, HE simul æquales sunt axi majori AB.

Cor. 1. Axis major AB bifariam secatur in centro C. Nam propter æquales DC, EC, (Def. 3.) & jam ostensas æquales DA, EB, erunt AC, CB æquales.

Cor. 2. Si a puncto extra Ellipsin ducantur duæ rectæ ad focos, erunt hæ simul majores axe majore; si vero ducantur a puncto intra Ellipsin, erunt simul minores eodem axe. Patet per 20. 1. Eucl.

Cor. 3. Et contra: Si rectæ a puncto ductæ ad focos, sint si-

mul æquales, majores, vel minores axe majore; erit in primo casu punctum illud in Ellipsi, in secundo extra, & intra illam in tertio.

Cor. 4. Distantia verticis F vel G axis minoris, ab utrovis focorum, æqualis est semiaxi majori. Jungantur enim GD, GE; & propter æquales CD, CE, communem CG, & angulos ad C æquales; erunt triangula CDG, CEG æqualia, & igitur æquales sunt DG, EG: & ambæ simul æquales sunt axi majori, ergo utraque ipsarum ejus dimidio est æqualis.

Cor. 5. Axis minor FG bifariam dividitur in centro. Ducantur enim a foco D, ad ipsius vertices, rectæ DF, DG, erunt hæ inter se æquales per præcedens Corollarium; igitur æquales sunt anguli DFC, DGC, & recti sunt DCF, DCG: æquales igitur sunt CF, CG, (26. 1.)

PROP. II.

Quadratum ex dimidio axis minoris æquale est rectangulo contento segmentis axis majoris, inter focum & vertices ipsius interceptis.

Fig. 1. Ducatur EG a foco ad verticem axis minoris, sitque C centrum, & A, B vertices axis majoris, & quadrata ex GC, CE simul æqualia erunt (quadrato ex GE, hoc est, quadrato ex CB [Cor. 4. 1. huj.] hoc est) quadrato ex CE, & rectangulo AEB simul (5. 2.), auferatur commune quadratum ex CE, & reliquum quadratum ex GC æquale erit reliquo rectangulo AEB.

PROP. III.

Fig. 2. Omnis diameter HK bifariam secatur in centro C.

Si enim æquales non sint CH, CK, sit C*k* ipsi CH æqualis, & ducantur ad focos D, E rectæ a punctis H, K, *k*: itaque, quoniam æquales sunt CD, CE, & æquales ponuntur CH, C*k*, erunt triangulo DCH, EC*k* æqualia, & basis DH basi E*k*. Eodem modo æquales erunt EH, D*k*; quare E*k*, D*k* simul æquales sunt (ipsis DH, HE, hoc est) ipsis EK, DK simul; quod est absurdum (21. 1.); ergo æquales sunt CH, CK.

PROP.

PROP. IV.

Si a puncto Ellipseos H ducatur HK ad rectos angulos axi majori AB, & recta HE ad focum puncto H propiorem; erit CB, semiaxis scil. major, ad CE distantiam foci a centro, ut CK distantia rectæ perpendicularis a centro; ad excessum semiaxis majoris supra ductam ad focum. Fig. 1.

Fiat BL æqualis ipsi EH, & ducatur HD ad alterum focum, centro vero H, & intervallo HE describatur circulus axi AB rursus occurrens in O, & rectæ DH in M, N punctis; & quoniam DE dupla est ipsius CE, & OE dupla ipsius KE (3. 3.), erit summa vel reliqua DO dupla summæ vel reliquæ CK; & quoniam DN æqualis est ipsis DH, HE simul, hoc est ipsi AB (1. huj.), erit DN dupla CB, & est MN dupla ipsius HE seu LB; quare erit reliqua DM dupla reliquæ CL; & propter circulum (Cor. 36. 3), æqualia sunt rectangula NDM, EDO, igitur est ND, seu AB, ad DE, ut DO ad DM (16. 6.); sumptisque ipsarum dimidiis, est CB ad CE, ut CK ad CL; & est CL excessus CB supra LB, seu HE.

Cor. Et contra: Si in recta linea positione & magnitudine datâ AB, quæ bifariam secta est in C, datum sit punctum aliud E inter B & C; & a puncto H ducatur ad AB perpendicularis HK, & jungatur HE, cui ponatur æqualis BL versus punctum C; fuerintque CL, CK, CE, CB proportionales, & L, K, ad easdem partes puncti C; tanget punctum H Ellipsin positione datam, scil. cujus axis major est AB, & focus punctum E. Fig. 1. n. 1.

Nam fiat AD æqualis ipsi BE, & secundum definitionem primam describatur Ellipsis axe majore AB, & focis D, E, erit punctum H in hac Ellipsi: Nam si non fuerit, occurrat KH Ellipsi in puncto Q, & junctæ EQ fiat BR æqualis; ergo per hanc propositionem est CR ad CK, ut CE ad CB; & ex hypothesi est CL ad CK, ut CE ad CB; quare est CR ad CK, ut CL ad CK; æquales igitur sunt CL, CR, *Q. E. A.* Non igitur occurrit Ellipsis rectæ KH in Q: & similiter ostendetur eam ei non occurrere in alio

lio quovis puncto præter H, ad easdem sciz. partes rectæ AB; quare est H in hac Ellipsi.

PROP. V.

Fig. 1. n. 1, 2. Iisdem manentibus, si a vertice axis majoris, puncto H propiore, ponatur versus centrum recta BL, distantiæ puncti H a foco E æqualis; erit quadratum ex perpendiculari HK æquale excessui rectanguli AKB contenti segmentis axis inter vertices ipsius & perpendicularem, supra rectangulum DLE contentum segmentis inter L terminum rectæ BL & focos interceptis.

NAm quoniam recta CB utcunque secta est in L, erunt (7. 2.) quadrata ex BC, CL simul æqualia rectangulo BCL bis & quadrato ex BL, hoc est, propter CB, CE, CK, CL proportionales, rectangulo ECK bis & quadrato ex BL seu HE, hoc est, rectangulo ECK bis & quadratis ex KE, KH, hoc est (7. 2.) quadratis ex EC, CK, & KH; quare duo quadrata ex BC, CL æqualia sunt tribus ex EC, CK, KH quadratis, & demptis utrinque quadratis ex CL, CK, erit (5. 2.) reliquum, sciz. rectangulum AKB, reliquo rectangulo DLE & quadrato ex KH æquale; igitur est quadratum ex KH excessus quo rectangulum AKB superat DLE.

PROP. VI.

Fig. 1. n. 1. 2. Si a puncto Ellipseos H ducatur recta HK parallela alterutri axi FG, alterique AB occurrens in K; erit quadratum ex axe cui occurrit ducta ad quadratum ex Axe cui parallela est, ut rectangulum contentum segmentis ejus cui occurrit ad quadratum ex ipsa ducta.

PRimo, Sit ducta HK parallela axi minori FG, & ad focos D, E ductis HD, HE; minori ipsarum HE ponatur a vertice axis majoris, versus centrum C, æqualis recta BL; & quoniam proportionales sunt (4. hujus.) CB, CE, CK, CL, erunt quadrata ex ipsis proportionalia; igitur quoniam est totum, sciz. quadratum ex

CB

CB ad totum sciz. quadratum ex CE, ut quadratum ex CK ad quadratum ex CL; erit quadratum ex CB ad quadratum ex CE, ut reliquum rectangulum AKB ad reliquum rectangulum DLE; & convertendo, ut quadratum ex CB ad rectangulum AEB, ita AKB rectangulum ad excessum ejus supra rectangulum DLE, hoc est, (per præcedentem) ad quadratum ex KH: est autem rectangulum AEB æquale quadrato ex CF (2. hujus); ergo ut quadratum ex CB ad quadratum ex CF, ita rectangulum AKB ad quadratum ex KH; igitur quadratum ex AB est ad quadratum ex FG, ut rectangulum AKB ad quadratum ex HK. FIG. I.

Secundo, Sit ducta HP parallela axi majori, occurratque minori in P; & quoniam ostensum fuit esse quadratum ex CB ad quadratum ex CF, ut rectangulum AKB ad quadratum ex HK, seu PC, erit invertendo, & per 19. 5. quadratum ex CF ad quadratum ex CB, ut rectangulum FPG ad quadratum ex CK, hoc est, ad quadratum ex HP. n. I, 2.

COR. I. Hinc quadrata ex rectis, quæ a punctis Ellipseos ducuntur ad alterutrum axem alteri parallelæ, sunt inter se ut rectangula contenta segmentis axis cui occurrunt, inter ductas sciz. & vertices axis. Nam sint HM, PQ axi FG parallelæ, occurrantque alteri AB in M, Q; & erit, per hanc propositionem, rectangulum AMB ad quadratum ex HM, ut (quadratum ex AB ad quadratum ex FG, hoc est, ut) rectangulum AQB ad quadratum ex PQ; ergo permutando, est rectangulum AMB ad rectangulum AQB, ut quadratum ex HM ad quadratum ex PQ. FIG. 2.

COR. 2. Si igitur describatur circulus super alterutrum axem tanquam diametrum, cui occurrant alteri Axi parallelæ MH, QP, in N, R punctis; erunt ipsarum segmenta inter axem & circuli circumferentiam, ut earundem segmenta inter axem & Ellipsin. Nam rectangula AMB, AQB, sunt quadratis ex MN, QR, æqualia, (Cor 8. 6. & 16. 6.) igitur est quadratum ex MN ad quadratum ex QR, ut quadratum ex MH ad quadratum ex QP; ergo & rectæ MN, QR, MH, QP sunt proportionales (22. 6.) FIG. 2.

PROP. VII.

Axis major est maxima, & axis minor minima omnium di-

diametrorum; & diameter, quæ propior est axi majori, major est diametro remotiore.

FIG. 2. SIT enim CB semiaxis major, & CH semidiameter quævis alia, & ducatur HM ad rectos angulos ipsi CB; quoniam igitur est quadratum ex CB ad quadratum ex semiaxe minore CF, ut rectangulum AMB ad quadratum ex HM, est autem CB major CF; erit AMB rectangulum majus quadrato ex HM; addatur commune quadratum ex CM, & erit quadratum ex CB majus quadrato ex CH, igitur recta CB major est rectâ CH. Eodem modo, ductâ HS ad rectos angulos axi minori, ostendetur CF minorem esse quam CH; ergo est CB maxima, & CF minima omnium semidiametrorum.

FIG. 2. Sit jam CT remotior ab axe majore quam CH, erit CH major CT; nam ducatur TV parallela HM, occurratque AB in V, & Ellipsi rursus in X, sitque HZ parallela ipsi MV, fiatque CQ æqualis CM.

Quoniam est rectangulum AVB ad quadratum ex VT, ut AMB rectangulum ad quadratum ex MH, seu VZ, erit per 19. 5. totum AVB ad totum sciz. quadratum ex VT, ut reliquum QVM *(a)*, ad reliquum rectangulum TZX, (5. 2) majus autem est rectangulum AVB quadrato ex VT, ergo & rectangulum QVM majus est rectangulo TZX: addatur utrinque quadratum ex CV, & erit quadratum ex CM majus rectangulo TZX & quadrato ex CV simul: rursus addatur utrinque quadratum ex MH, seu ZV, & quadrata ex CM, MH simul majora erunt quadratis ex VT, VC simul; hoc est, quadratum ex CH, majus est quadrato ex CT.

PROP. VIII.

Omnis recta, utrinque Ellipsi terminata, & parallela alter-

(*a*) Est Propositio 178 Lib. 7. Pappi Alexandrini sciz. si in recta linea AB sumantur æquales rectæ AQ, BM, & punctum V inter Q, M, erit rectangulum AVB æquale rectangulis AMB, QVM simul. Vid. fig. 2. hujus. Nam sectâ AB bifariam in C, rectangulum AVB, simul cum quadrato ex CV, æquale est (quadrato ex CB, [5. 2.] hoc est rectangulo AMB & quadrato ex CM [5. 2.] hoc est) rectangulo AMB, rectangulo QVM & quadrato ex CV (5. 2.) & ablato communi quadrato quod fit a CV, erit reliquum rectangulum AVB æquale reliquis rectangulis AMB, QVM.

terutri axium, bifariam secatur ab altero; seu, quod idem est, axes sunt diametri conjugatæ.

SIt HL parallela axi FG, occurratque alteri axi in M, & circulo super ipsum descripto in N, O punctis; igitur per Cor. 2. præcedentis, est MN ad MO, ut MH ad ML, & propter circulum æquales sunt (3. 3.) MN, MO, ergo & MH, ML. Fig. 2.

PROP. IX.

Omnis recta, Ellipsi terminata, & ab altero axe bifariam secta, parallela est alteri.

SIt recta HP bifariam secta in S, axe FG, erit HP parallela alteri axi AB; ducantur HM, PQ ipsi FC parallelæ, occurrantque circulo super AB descripto in N, R, & quoniam parallelæ sunt HM, FC, PQ, erit ut HS ad SP, ita MC ad CQ, æquales autem sunt HS, SP, quare & MC, CQ, igitur æquales sunt MN, QR (14. 3.) & proinde HM, PQ sunt æquales (Cor. 2. 6. hujus), sed & parallelæ, quare parallelæ sunt HP, MQ (33. 1.) Fig. 2.

Cor. Ex demonstratione liquet rectas HM, PQ, quæ parallelæ sunt alterutri axi FG, & abscindunt æqualia segmenta MC, QC alterius axis, inter ipsas & centrum, æquales esse inter se; & contra, si sint HM, PQ æquales, abscindent segmenta æqualia.

LEMMA I.

Si in recta linea sumatur punctum A, & ducantur duæ rectæ parallelæ BC, DE ad easdem partes primæ rectæ, & ad easdem puncti, vel ad oppositas partes rectæ, & oppositas partes puncti; sintque ductæ in eadem ratione quam habent segmenta rectæ inter ipsas & punctum: erunt termini parallelarum B, D, & punctum A, in recta linea. Fig. 3, 4.

NAm in primo casu, completis parallelogrammis AB, AD, ipsa similia erunt, & communem habent angulum ad A; quare Fig. 3.

 circa

circa eandem sunt diametrum (26. 6.), hoc est, in recta linea sunt A, B, D puncta.

Fig. 4. In secundo casu, jungantur BA, DA, & æquiangula erunt triangula ABC, ADE (6. 6.) quoniam sciz. est BC ad CA, ut DE ad EA, & æquales sunt anguli BCA, DEA; ergo æquales sunt anguli EAD, CAB; igitur AB, AD sunt in directum (14. 1.)

LEMMA III.

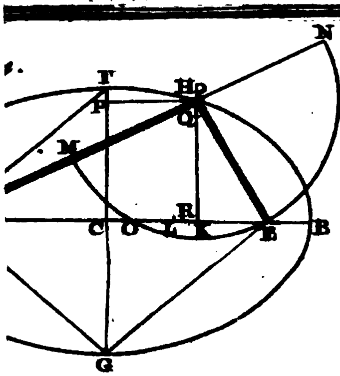
Fig. 5, 6, 7, 8. Si a duobus punctis A, B, ducantur duæ rectæ parallelæ AC, BD, & ab eisdem punctis ponantur aliæ duæ rectæ AE, BF inter se parallelæ, sive coincidentes primis rectis, sive non; eandemque quam primæ inter se rationem habentes, at jacentes versus easdem, vel contrarias partes rectæ AB, prout primo ductæ sunt versus easdem vel contrarias; & ducatur recta per C, D terminos parallelarum primò, vel ultimò ductarum: erit occursus hujus G cum recta AB, & reliqui duo ductarum termini sciz. E, F in recta linea.

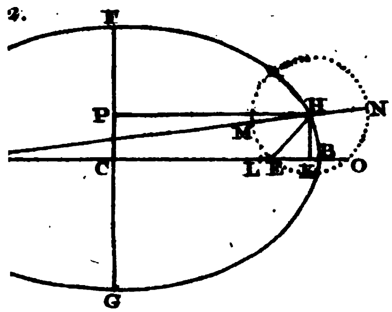
OCcurrat CD ipsi AB in G; & propter æquiangula triangula, erit AG ad BG, ut (AC ad BD, hoc est ex hypothesi ut) AE ad BF, ergo in recta linea sunt G, E, F puncta, per præcedens Lemma.

LEMMA IIII.

Fig. 9, 10, 11. Iisdem manentibus, quæ in Lemmate secundo posita fuere; si per terminos parallelarum, sciz. ipsarum AC, BD, vel AE, BF, puta C, D, ducantur duæ rectæ parallelæ inter se CH, DK, occurrantque AB in H, K, & junganturr EH, FK; erunt hæ etiam parallelæ.

NAm propter parallelas AC, BD, & CH, DK; æquiangula erunt triangula ACH, BDK; igitur est AH ad BK ut (AC ad BD, hoc est, ex hypothesi, ut) AE ad BF, & sunt anguli EAH, FBK





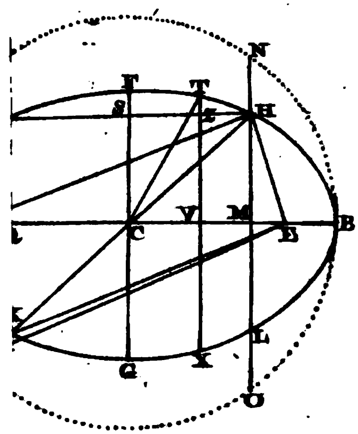


Fig.3.

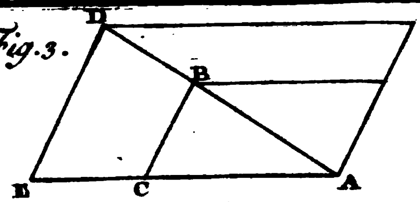


Fig. 4.

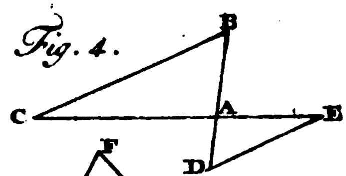


Fig. 5.

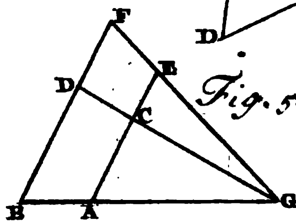


Fig. 6.

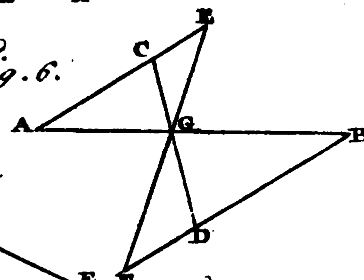


Fig. 7.

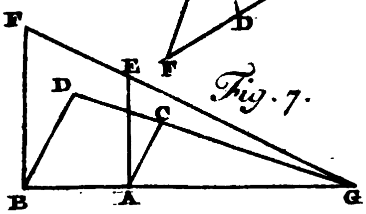
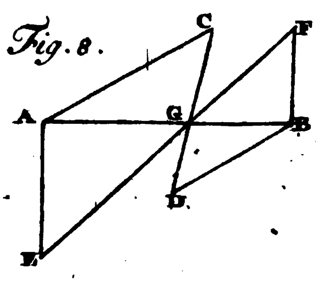


Fig. 8.



TAB.IV.*pag*.34.

FBK æquales, ergo triangula AHE, BKF sunt æquiangula (6. 6.) igitur æquales sunt anguli AHE, BKF, & proinde rectæ EH, FK sunt inter se parallelæ (27 aut 28. 1.)

PROP. X.

Si a puncto Ellipseos E, quod non sit vertex alterutrius axis, ducatur recta EF parallela alterutri axi CD, occurratque circulo super alterum descripto in puncto G, & ducatur recta circulum in puncto hoc contingens; occurret hæc circuli & Ellipseos diametro communi, & quæ ab occursu ad punctum in Ellipsi ducitur recta, Ellipsin continget: Recta etiam, quæ per verticem alterutrius axis alteri parallela ducitur, contingit Ellipsin. Fig. 12.

Sit AB axis alter, & C centrum Ellipseos & circuli, & jungatur CG, & circulum contingat GN; quoniam igitur rectus est CGN angulus, & angulus GCB minor est recto DCB, convenient GN, CB: conveniant in H, & jungatur HE, continget hæc Ellipsin; nam si non, occurrat ei rursus si fieri potest in K, & per K ducatur recta ipsi EF parallela, quæ axi AB occurrat in L, & circulo in M; & quoniam est EF ad KL, ut GF ad ML (Cor. 2. 6. huj.) & sunt H, K, E puncta in recta linea, erunt etiam H, M, G puncta in recta linea (Lem. 2.) recta igitur HG circulo in duobus punctis occurrit, sciz. G, M; eadem vero circulum ex hypothesi contingit, quod est absurdum: non igitur occurrit HE Ellipsi in alio puncto præter E, & proinde ipsam contingit. Fig. 12.

Et si per D verticem alterutrius axis CD, ducatur recta alteri AB parallela, continget hæc Ellipsin: non enim, sed, si fieri potest, occurrat Ellipsi rursus in O; & per O ducatur recta parallela ipsi CD, occurratque AB in P, & circulo in Q, cui etiam occurrat CD in R; quoniam igitur parallelogrammum est CO, erit CD æqualis ipsi PO; sed ut CD ad PO, ita CR ad PQ (Cor. 2. 6. huj.) æquales igitur sunt CR, PQ; sed & parallelæ, quare juncta RQ parallela est ipsi CP; rectus proinde est QRC angulus, igitur RQ, quæ ab extremitate diametri ipsi ad rectos angulos ducitur, intra Fig. 12.

 cir-

circulum cadit; quod est absurdum, (16. 3.); ergo contingit DQ Ellipsin.

Cor. 1. Et si EH contingat Ellipsin, & jungatur GH; eodem prorsus modo ostendetur GH circulum contingere.

Cor. 2. Et igitur a puncto Ellipseos, duci potest tantum unica recta quæ Ellipsin contingat; nam si duæ contingerent Ellipsin in eodem puncto, duæ etiam contingerent circulum in uno puncto, contra 16. 3.

Cor. 3. Et recta linea non occurrit Ellipsi in pluribus quam duobus punctis, secus & recta occurrere posset circulo in pluribus quam duobus, quod est absurdum; quapropter Ellipsis ad easdem partes scil. contingentium ubique convexa est, & cava versus contrarias.

Cor. 4. Angulus, quem diameter quævis præter axes comprehendit, cum contingente per verticem ipsius ducta ad partes axis majoris, est major recto: sit CE diameter, EH contingens, & AB axis major, reliquis ut in propositione manentibus; erit angulus CEH major angulo CGH, (21. 1.) hoc est, recto.

Cor. 5. Et patet quomodo dato positione & magnitudine axe majore, duci poterit recta, quæ Ellipsin in dato ipsius puncto contingat.

Cor. 6. Rectæ contingentes Ellipsin in verticibus diametri sunt inter se parallelæ.

Fig. 12. Contingant enim EH, ST Ellipsin in verticibus diametri ECS, occurrantque axi AB in H, T; & ducantur ad axem perpendiculares EF, SV, quæ circulo super ipsum descripto occurrant in G, X, junganturque GH, XT, quæ circulum in G, X contingent per Cor. 1. hujus: & quoniam GF, XV in eadem ratione dividuntur in E, S punctis (Cor. 2. Prop. 6. huj.) & recta est linea ECS, erunt & G, C, X puncta in linea recta (Lemm. 2.); & quoniam parallelæ sunt GH, XT quæ circulum in verticibus diametri GX contingunt, erunt & EH, ST parallelæ, per Lemm. 3.

PROP. XI.

Si a puncto Ellipseos ducantur ad focos duæ rectæ, & ducatur recta linea bifariam secans angulum qui deinceps est

eſt ei qui ductis ad focum comprehenditur; continget hæc Ellipſin.

Caſ. 1. **Q**Uando recta bifariam angulum ſecans parallela eſt axi majori, ſit AB axis major, C centrum, & D, E foci Ellipſeos; & a puncto ipſius F ad focum ductis FD, FE, recta FH, quæ bifariam ſecat angulum EFG, parallela ſit axi AB: continget FH Ellipſin. FIG. 13.

Fiat FG æqualis ipſi FE, & jungatur EG quæ occurrat FH in H; & quoniam æquales ſunt FE, FG, communis autem FH, & anguli EFH, GFH æquales, erit EH æqualis ipſi HG, & anguli ad H recti: & propter parallelas FH, ED, eſt EH ad HG, ut DF ad FG, quare DF æqualis eſt FG, hoc eſt, ipſi FE; & in triangulis DFC, EFC, communis eſt FC; & DC ipſi CE æqualis; æquales igitur & recti ſunt anguli ad C: ergo CF eſt ſemiaxis minor, (Def. 6. huj.); & proinde FH, quæ ipſi normalis eſt, Ellipſin contingit, (10. huj.).

Caſ. 2. Cæteris manentibus, occurrat jam FH axi in K, & ducatur FL eidem axi ad angulos rectos, occurratque circulo ſuper AB deſcripto in M; jungatur MK, & ducatur MC ad centrum: denique fiat BN æqualis ipſi EF, eritque AN æqualis DF (1. huj.). Et quoniam trianguli DFE exterior angulus EFG ſectus eſt bifariam rectâ FK, baſi DE occurrente in K, erit DK ad KE, ut (DF ad FE (*a*), hoc eſt, ut) AN ad NB; & componendo, eſt DK, ſimul cum KE, ad KE, ut AB ad NB; ſumptiſque antecedentium dimidiis, eſt CK ad KE, ut CB ad BN; & convertendo permutandoque, FIG. 14.

(*a*) Eſt caſus ſecundus 3. 6. Euclidis elementis addendus, utpote pariter utilis; demonſtratur autem iiſdem fere verbis cum primo, ſciz. Sit triangulum ABC, & ſecetur angulus exterior FAC rectâ lineâ AD; erit ut BD ad DC, ita BA ad AC. Ducatur per C ipſi DA parallela CE, quæ conveniat cum BA in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD, BC incidit recta linea quædam AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis: ſed CAD angulus ponitur æqualis angulo FAD; ergo & FAD ipſi ACE angulo æqualis erit. Rurſus, quoniam in parallelas AD, EC recta linea BAF incidit, exterior angulus FAD æqualis eſt interiori AEC: oſtenſus autem eſt & angulus ACE angulo FAD æqualis; ergo & ACE ipſi AEC æqualis erit; ac propterea latus AE æquale lateri AC. Et quoniam uni laterum trianguli BDA, videlicet ipſi AD, parallela ducta eſt EC; erit ut BC ad CD, ita BE ad EA; & componendo, ut BD ad DC, ita BA ad AE; æqualis autem eſt AE ipſi AC: eſt igitur ut BD ad DC, ita BA ad AC. Et ſimiliter converſa hujus demonſtrari poteſt. FIG. 14. n. 2.

tandoque, est CK ad CB, ut (CE ad CN, hoc est, per 4. huj. ut) CB ad CL; & est CB æqualis CM, quare ut CK ad CM, ita CM ad CL: igitur æquiangula sunt triangula CMK, CLM, (6. 6.) Rectus autem est angulus CLM; quare rectus est CMK: & propterea recta MK circulum contingit; (16. 3.); ergo & FK Ellipsin contingit, (10. huj.)

FIG. 14. Aliter: Producatur DF ad G, ita ut æquales sint FE, FG, & sumatur in FK quodvis punctum O, jungaturque OD, OE, OG & EG, quæ occurrat ipsi FK in P: quoniam igitur æquales sunt FE, FG, & communis FP, suntque anguli EFP, GFP æquales; erit EP æqualis ipsi PG, & anguli ad P recti: quare æquales erunt OE, OG. Sunt autem DO, OG simul majores ipsâ DG; ergo DO, OE simul majores sunt eâdem DG, hoc est, ipsis DF, FE simul, hoc est, axe majore AB: quare punctum O est extra Ellipsin, (Cor. 3. 1 huj.); recta igitur FK contingit Ellipsin.

COR. Et contra: Si recta FK contingat Ellipsin, & a contactu F ducantur ad focos rectæ FD, DE; anguli DFO, EFK, quos cum contingente ad oppositas ipsius partes comprehendunt, erunt inter se æquales. Nam si inæquales fuerint, productâ DF ad G, erunt etiam EFK, GFK anguli inæquales; recta autem, quæ bifariam secat angulum EFG, Ellipsin contingit, per hanc Propositionem; & ex hypothesi ipsam contingit FK in eodem puncto: quod est absurdum, (per Cor. 2. 10. huj.)

PROP. XII. PROBL. I.

Dato positione & magnitudine Ellipseos axe majore, datisque focis; rectam ducere parallelam positione datæ, quæ Ellipsin contingat.

FIG. 14. Sit AB Ellipseos axis major, D, E foci, sitque recta ST positione data; ab alterutro focorum E ducatur EV ipsi ST ad rectos angulos; & centro D, intervallo ipsi AB æquali, describatur circulus, qui occurret ipsi EV in duobus punctis, quorum alterutrum sit G; &, junctâ DG, ad ipsam ducatur EF, faciens angulum GEF æqualem ipsi EGD; & per F ducatur FK, ipsi ST parallela: continget FK Ellipsin in puncto F.

Nam

Nam propter angulos GEF, EGF æquales, æquales inter se erunt rectæ EF, FG; quare DF, FE simul æquales erunt ipsi DG, hoc est, axi majori AB: ergo punctum F est in Ellipsi, (Cor. 3. 1. huj.) Occurrat FK rectæ VE in P; & quoniam parallelæ sunt FK, ST, & est EV ad rectos angulos ipsi ST, erit eadem ad rectos angulos ipsi FP; æquales igitur sunt anguli EFP, GFP: quare recta FK Ellipsin contingit per præcedentem. Et similiter altera contingens duci poterit ipsi ST parallela, ope sciz. alterius puncti, in quo circulus centro D descriptus ipsi EV occurrit.

PROP. XIII.

Omnis recta parallela contingenti, & utrinque Ellipsi terminata, bifariam secatur diametro quæ per contactûs punctum transit.

Si diameter fuerit axis alteruter, contingens per ipsius verticem ducta parallela erit axi alteri, (10. & 2. Cor. 10. huj.); igitur recta quævis parallela contingenti erit huic axi parallela, & proinde bifariam secabitur diametro quæ per contactum transit, (8. huj.)

Sit autem CE quævis alia diameter, & Ellipsin in vertice ipsius Fig. 15.
contingat EF; & huic parallela GH terminetur Ellipsi in G, H n. 1. 2.
punctis, occurratque diametro in K: erunt GK, KH inter se æquales.

Occurrat contingens EF alterutri axi AB in F; eidemque axi occurrat GH in L; & per puncta E, G, H ducantur ad AB perpendiculares EM, GN, HO, occurrentes circulo super diametrum AB, descripto in P, Q, R punctis; & jungantur FP & LQ, quæ conveniat junctæ CP in S; & jungatur SK: Quoniam igitur EF contingit Ellipsin, continget FP circulum, (Cor. 1. 10. huj.); & quoniam parallelæ rectæ QN, RO in eadem ratione sectæ sunt in G, H, & est HGL recta linea, erunt puncta L, Q, R in recta linea, (Lemma 2.); & quoniam rectæ parallelæ PM, QN in eadem ratione secantur in E, G punctis, per quæ ductæ sunt parallelæ EF, GL, erunt etiam FP, LQ parallelæ, (Lemma 3.): igitur est CS ad SP, ut (CL ad LF; hoc est, ut) CK ad KE; & proinde (2. 6.) parallela est KS ipsi EP, & igitur ipsis QN, RO; quare est GK ad KH, ut QS ad SR; sed æquales sunt QS, SR, quoniam sciz. CP

ad

ad rectos angulos est rectæ PF contingenti circulum, & igitur huic parallelæ RQ; ergo æquales sunt GK, KH.

Cor. 1. Et contra: Omnis recta Ellipsi terminata, ut GH, & bifariam secta diametro CE, id est, quævis diametro huic ordinatim applicata, parallela est rectæ EF Ellipsin in vertice diametri contingenti. Si enim non sit, ducatur contingens ipsi GH parallela, (12. huj.), & bifariam secabitur GH diametro quæ per punctum contactûs hujus contingentis transit, eadem vero bifariam secatur aliâ diametro CE: quod est absurdum.

Cor. 2. Omnes igitur eidem diametro ordinatim applicatæ, sunt inter se parallelæ.

Cor. 3. Et si duæ vel plures rectæ parallelæ Ellipsi terminentur, diameter, quæ unam ex ipsis bifariam secat, bifariam secabit & reliquas. Nam quæ bifariam secta est, parallela erit contingenti Ellipsin in vertice diametri; ergo & reliquæ eidem parallelæ erunt, & igitur diametro bifariam secabuntur.

Cor. 4. Et contra: Recta, quæ duas parallelas rectas & Ellipsi terminatas bifariam secat, est diameter. Nam si non, ducatur diameter unam ex parallelis bifariam secans, bifariam secabit hæc alteram, & utraque bifariam secta est aliâ rectâ; quod est absurdum.

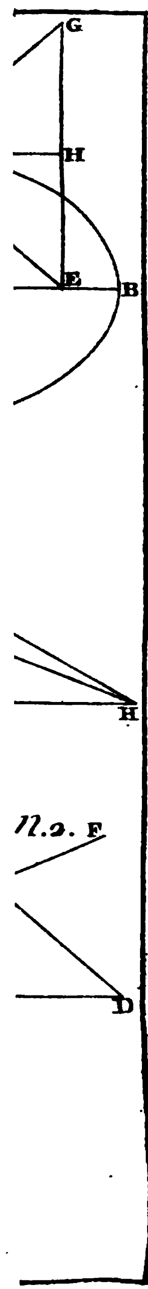
Cor. 5. Et recta quæ per verticem diametri parallela ducta est ordinatim diametro applicatæ, Ellipsin contingit.

Cor. 6. Et duæ rectæ in Ellipsi non per centrum transeuntes, bifariam se mutuo non secabunt. Nam utraque parallela esset rectæ, quæ Ellipsin contingit in vertice diametri per rectarum occursum ductæ; ideoque inter se parallelæ essent. *Q. E. A.*

PROP. XIV.

Fig. 15. n. 1. 2. Duæ diametri ET, VX, quarum una VX parallela est rectæ EF, quæ Ellipsin in vertice E alterius contingit, sunt diametri conjugatæ.

PEr vertices E, V ducantur, ad alterutrum axem AB, rectæ EM, VY, alteri CD parallelæ; occurrantque circulo super diametrum AB, descripto in P, Z; & a puncto F, in quo EF occurrit axi AB, ducatur FP, quæ circulum continget, (Cor. 1. 10. huj.); &


G
H
E
B
H
n.2.
F
D

& a puncto Z ducatur $Z\alpha$ circulum contingens, & occurrens axi in α, & juncta αV, Ellipsin continget, (10. huj.); denique a centro ducantur CP, CZ.

Quoniam igitur parallelæ PM, ZY in eadem ratione sectæ sunt in E, V punctis, per quæ ductæ sunt parallelæ EF, VC, erunt etiam FP, CZ parallelæ, (Lemma 3.): rectus vero est angulus CPF; quare rectus est PCZ, & rectus est $CZ\alpha$; quare parallelæ sunt CP, $Z\alpha$, ergo & CE, αV sunt parallelæ, (Lemma 3.): rectæ igitur parallelæ ipsi CE, parallelæ erunt & rectæ $V\alpha$, quæ Ellipsin in V contingit, & proinde, per Propositionem præcedentem, bifariam secabuntur diametro CV: & quoniam CV ex hypothesi parallela est EF, rectæ omnes ipsi CV parallelæ, erunt etiam parallelæ rectæ EF, & ideo diametro CE bifariam secabuntur; ergo CE, CV sunt diametri conjugatæ, (Def. 7. huj.).

Cor. 1. Et quoniam nulla diameter præter CV poterit rectas ipsi CE parallelas, & utrinque Ellipsi terminatas, bifariam secare, nulla præter CV erit ipsi CE conjugata.

Cor. 2. Si igitur CE, CV sint diametri conjugatæ, erit utraque ipsarum parallela contingenti per verticem alterius ductæ.

Cor. 3. Et contra: Recta, quæ per verticem diametri parallela ducitur diametro ipsi conjugatæ, Ellipsin in vertice contingit.

Cor. 4. Et recta, quæ diametro parallela est, & Ellipsi terminata, bifariam secabitur diametro ei conjugatâ: nam parallela erit contingenti per verticem hujus conjugatæ, & ideo bifariam secabitur ab ipsa conjugata. Et contra: Si bifariam secta fuerit diametro, parallela erit conjugatæ.

PROP. XV.

Si a puncto Ellipseos ducatur ad alterutram duarum diametrorum conjugatarum, recta alteri parallela; erit quadratum ex diametro, ad quam ducta est recta, ad quadratum ex altera diametro; ut rectangulum contentum segmentis primæ inter ipsius vertices & ductam, ad quadratum ex recta ducta.

FIG. 15. n. 1, 2. Sint ET, VX diametri conjugatæ, & a puncto Ellipseos G ducatur GK ad diametrum ET, parallela alteri VX; erit quadratum ex ET ad quadratum ex VX, ut rectangulum EKT ad quadratum ex GK.

Nam quoniam ET, VX sunt diametri conjugatæ, erit VX parallela contingenti EF per verticem alterius ductæ; &, iisdem manentibus, quæ in duabus ultimis Propositionibus constructa & ostensa fuerunt, præterea occurrat SK producta ipsi AB in β; & per G ducatur recta $G\gamma$, parallela eidem AB, & occurrens $S\beta$ in γ; & quoniam rectus est angulus PCZ, anguli autem CPM, MCP simul rectum conficiunt, erit PCZ angulus eisdem simul æqualis, & ablato communi MCP, erit reliquus MCZ reliquo angulo CPM æqualis; & æquales sunt rectæ CP, CZ, quare triangula rectangula PMC, CYZ sunt æqualia; igitur PM æqualis est ipsi CY; propter vero parallelas PM, $S\beta$, & PF, SL, erunt triangula PFM, $SL\beta$ æquiangula; & igitur CPM, $SL\beta$ æquiangula erunt, (8. 6.); quare est CP ad PM, ut SL ad $L\beta$, hoc est, propter parallelas, ut SQ ad $N\beta$, & permutando, CP ad SQ, ut (PM ad $N\beta$, hoc est, CY ad $G\gamma$, hoc est, propter æquiangula triangula CVY, $GK\gamma$, ut) CV ad GK, quare est quadratum ex CP ad quadratum ex SQ, ut quadratum ex CV ad quadratum ex GK. Est vero quadratum ex CP ad quadratum ex CS, ut quadratum ex CE ad quadratum ex CK; & convertendo, est quadratum ex CP ad quadratum ex SQ, ut quadratum ex CE ad rectangulum EKT; & ostensum fuit esse quadratum ex CP ad quadratum ex SQ, ut quadratum ex CV ad quadratum ex GK: ergo quadratum ex CE est ad rectangulum EKT, ut quadratum ex CV ad quadratum ex GK, & permutando: igitur quadratum ex ET est ad quadratum ex VX, ut rectangulum EKT ad quadratum ex GK.

Constat igitur universim, quadratum ex diametro quavis esse ad quadratum ex diametro ipsi conjugata, ut rectangulum contentum segmentis illius inter ordinatim ipsi applicatam & vertices ejus, ad quadratum ex ipsius applicatæ segmento inter Ellipsin & diametrum. Nam recta ordinatim applicata diametro, parallela est contingenti quæ per verticem ducitur, & idcirco eadem parallela est diametro huic conjugatæ.

COR. 1. Quadrata ex ordinatim applicatis eidem diametro, sunt inter

inter se ut rectangula contenta segmentis diametri, ut de axibus ostensum fuit in Cor. 1. Prop. 6.

Cor. 2. Si Ellipseos AT sint ET, VX diametri conjugatæ, & a puncto G ducatur GK uni diametrorum parallela, & alteri ET occurrens in K, fueritque quadratum ex ET ad quadratum ex VX, ut rectangulum EKT ad quadratum ex ducta GK, erit punctum G in Ellipsi. Si enim recta GK non occurrit Ellipsi in puncto G, ad eas partes sciz. diametri ET ad quas est G, occurrat ei in δ; & per hanc Propositionem erit rectangulum EKT ad quadratum ex δK, ut (quadratum ex ET ad quadratum ex VX, hoc est, ex hypothesi, ut) rectangulum EKT ad quadratum ex GK: æqualia igitur sunt quadrata ex δK, GK; & ipsæ δK, GK æquales erunt: quod fieri non potest.

Cor. 3. Et si a duobus punctis G, ε, quorum ε in Ellipsi fuerit, ducantur ad diametrum ET rectæ GK, $\varepsilon\zeta$ parallelæ ordinatim applicatis eidem diametro; fuerintque rectangula EKT, EζT contenta segmentis diametri inter ductas & ipsius vertices, ad se invicem ut quadrata ex ductis GK, $\varepsilon\zeta$: erit etiam alterum punctum G in Ellipsi. Demonstratur eodem modo ex Coroll. 1. quo Coroll. 2. ex Propositione.

Cor. 4. Et si describatur circulus super diametrum Ellipseos AB, Fig. 16. & ducantur ad diametrum ordinatim applicatæ DE, FG, & a punctis D, F rectæ DH, FK ad rectos angulos diametro, quæ circulo in H, K occurrant; habebunt perpendiculares DH, FK eandem inter se rationem, quam habent ordinatæ DE, FG. Nam quadrata ex DE, FG sunt inter se ut rectangula ADB, AFB, hoc est, propter circulum, ut quadrata ex DH, FK; quare est DH ad FK, ut DE ad FG, (22. 6.)

Cor. 5. Et si ordinatim diametro applicatæ abscindant æqualia segmenta diametri inter ipsas & centrum, æquales erunt inter se; & si æquales fuerint inter se, abscindent æqualia segmenta.

PROP. XVI.

Si a puncto Ellipseos E ducatur recta ED ordinatim appli- Fig. 16. cata diametro AB, & ducatur a puncto D perpendicularis diametro, occurrens circulo super diametrum in H; rectaque circulum in H contingens occurrat dia-

 metro

metro in L. & jungantur punctum L & Ellipseos punctum E rectâ EL, continget hæc Ellipsin in E: & contra.

Si enim Ellipsin non contingat EL, occurrat ei, si fieri potest, in alio puncto M, & per M ducatur ad diametrum recta MN parallela ipsi ED; per N vero ducatur NO ad rectos angulos diametro, occurratque circulo in O, ad easdem sciz. partes diametri AB ad quas est H: quoniam igitur a punctis D, N ductæ sunt DE, NM inter se parallelæ, & DH, NO etiam inter se parallelæ, eandemque quam DE, NM rationem habentes, (Cor. 3. præced.) sintque in recta linea E, M, L puncta, in recta erunt H, O, L, (Lemma 2.); quare recta LH secat circulum, eadem vero eundem contingit; quod est absurdum: igitur LE contingit Ellipsin. Eodem prorsus modo, si EL contingat Ellipsin, ostendetur LH contingere circulum.

PROP. XVII.

FIG. 16. Si a puncto Ellipseos E ducatur recta linea ipsam contingens, & diametro AB occurrens in L, & a contactu E ad diametrum ordinatim applicetur recta ED; erit semidiameter CB media proportionalis inter rectas CL, CD, segmenta sciz. diametri inter centrum & contingentem, & centrum & ordinatam; segmenta vero diametri inter ipsius vertices & contingentem, erunt inter se ut segmenta ejusdem inter eosdem vertices & ordinatim applicatam.

Super diametrum AB describatur circulus, & a puncto D ducatur ad diametrum perpendicularis DH, circulo occurrens in H, & jungatur HL; & quoniam LH circulum contingit (16. huj.) & est HD diametro perpendicularis; proportionales erunt CD, CB, CL; quod erat primum.

Secundo, Quoniam est CL ad CB, ut CB ad CD, erit convertendo, CL ad BL, ut CB ad BD; & dupla antecedentium, CL bis ad BL, ut AB ad BD; & dividendo, AL ad BL, ut AD ad BD.

Cor.

Cor. 1. Hinc rectangulum contentum segmentis diametri, inter ordinatam & centrum, & inter eandem & contingentem, æquale est rectangulo contento segmentis inter ordinatam & vertices diametri: nam, propter CD, CB, CL proportionales, est quadratum ex CB, æquale rectangulo DCL; & ablato communi quadrato ex CD, erit reliquum, sciz. rectangulum ADB, æquale reliquo rectangulo CDL (5. & 3. 2.)

Cor. 2. Et rectangulum contentum segmentis diametri inter contingentem & centrum, & inter eandem & ordinatam, æquale est contento segmentis inter contingentem & vertices diametri; ablatis enim æqualibus, quadrato sciz. ex CB & rectangulo DCL ex quadrato quod fit a CL, erit reliquum, sciz. rectangulum ALB, reliquo rectangulo CLD æquale.

PROP. XVIII.

Si a puncto Ellipseos E, ducatur ad diametrum AB ordinatim applicata ED, & recta EL diametro occurrens in L; fuerintque, intercepta inter L & centrum C, semidiameter CB, & intercepta DC inter ordinatim applicatam & centrum proportionales; continget recta EL Ellipsin in E: vel secundo si rectæ inter punctum L & vertices diametri fuerint inter se, ut rectæ inter ordinatim applicatam & eosdem vertices: vel tertio, si quatuor rectæ inter punctum L & singula puncta A, C, D, B proportionales fuerint; Ellipsin in utroque casu continget recta EL. Fig. 16.

In primo casu, Si EL non contingat Ellipsin, contingat EP; igitur per præcedentem, proportionales erunt CP, CB, CD, & ex hypothesi proportionales sunt CL, CB, CD; æquales igitur sunt CP, CL, quod est absurdum; igitur contingit Ellipsin recta EL.

Secundo, Quoniam ex hypothesi est AL ad BL, ut AD ad BD; erit componendo, AL & BL simul ad BL, ut AB ad BD; & dimidia antecedentium, CL ad BL, ut CB ad BD; & convertendo, CL ad CB, ut CB ad CD; ergo EL contingit Ellipsin per primum casum.

Ter-

Tertio, Quoniam ex hypothesi est AL ad CL, ut DL ad BL; erit permutando AL ad DL, ut CL ad BL; igitur est CL ad BL, ut reliqua AC seu CB ad reliquam BD; & convertendo, CL ad CB, ut CB ad CD: ergo EL contingit Ellipsin per primum casum.

PROP. XIX.

FIG. 17. Si a verticibus A, B diametrorum conjugatarum Ellipseos CA, CB, ducantur ad tertiam diametrum DE, ordinatim applicatæ AF, BG; erit quadratum ex intercepta inter alterutram ductarum & centrum, æquale rectangulo contento segmentis inter reliquam ductam, & vertices diametri ad quam ducuntur, sciz. erit quadratum ex CG æquale rectangulo EFD, & quadratum ex CF æquale rectangulo EGD.

Ducantur AH, BK Ellipsin contingentes in A, B, & diametro ED occurrentes in H, K; & quoniam parallelæ sunt CB, AH, & BG, AF, æquiangula erunt CBG, HAF triangula; & propter BK, CA parallelas erunt etiam triangula CBK, HAC æquiangula; igitur est CG ad FH ut (CB ad AH, hoc est, ut) CK ad CH; est autem CD media proportionalis tum inter CG, CK, tum inter CF, CH (16. hujus), quare est CF ad CG, ut CK ad CH; & ostensum fuit esse CG ad FH, ut CK ad CH; ergo ut CF ad CG, ita CG ad FH, & igitur quadratum ex CG æquale est rectangulo CFH; rectangulum vero EFD eidem CFH est æquale (Cor. 17. hujus), ergo quadratum ex CG æquale est rectangulo EFD, & demptis æqualibus hisce ex quadrato quod fit a CD, erit reliquum rectangulum sciz. EGD, æquale reliquo quadrato ex CF.

COR. 1. Hinc semidiameter CD ad quam ordinatæ ducuntur, est ad semidiametrum ipsi conjugatam CL, ut distantia alterutrius ordinatæ a centro, ad reliquam ordinatam: nam quadratum ex CD est ad quadratum ex CL, ut (rectangulum EFD ad quadratum ex AF, hoc est, per hanc propositionem, ut) quadratum ex CG ad quadratum ex AF; igitur est CD ad CL, ut CG ad AF; & similiter ostendetur esse CD ad CL, ut CF ad BG.

COR.

Cor. 2. Et perspicuum est quadrata ex segmentis diametri ad quam ordinatæ ducuntur, inter ordinatas sciz. & centrum, esse simul æqualia quadrato ex semidiametro: nam quoniam quadratum ex CG æquale est rectangulo EFD, erunt quadrata ex CF, CG, simul æqualia quadrato ex CF & rectangulo EFD, hoc est, quadrato ex CD (5. 2.)

Cor. 3. Et igitur summa quadratorum ex duabus quibusvis diametris conjugatis, æqualis est summæ quadratorum ex axibus. Sint enim CD, CL semiaxes, & CA, CB duæ semidiametri conjugatæ, sintque AF, BG perpendiculares ipsi CD; AM vero & BN perpendiculares ipsi CL; & quoniam, per corollarium præcedens, quadratum ex CD æquale est quadratis ex CF, CG; & quadratum ex CL, per idem, æquale est quadratis ex CM, CN, hoc est, ex ipsis AF, BG; erunt quadrata ex CD, CL simul æqualia quatuor quadratis ex CF, CG, AF, BG, quibus etiam quadrata ex AC, BC æqualia sunt (47. 1.): ergo quadrata ex AC, BC simul æqualia sunt quadratis ex CD, CL simul; igitur quadrata ex ipsis diametris æqualia sunt quadratis ex axibus.

PROP. XX.

Si per vertices duarum diametrorum conjugatarum ducantur quatuor rectæ Ellipsin contingentes; erit parallelogrammum ipsis contentum æquale parallelogrammo contento contingentibus per vertices duarum quarumcunque aliarum diametrorum conjugatarum.

Contingant enim Ellipsin rectæ OV, OY, YX, XV in A, B, verticibusque ipsis oppositas diametrorum conjugatarum AC, BC; similiter contingant Ellipsin rectæ PT, PR, RS, ST in verticibus diametrorum conjugatarum DC, LC; erunt figuræ OVXY, PRST parallelogramma (Cor. 6. Prop. 10. hujus.) & inter se æquales. Fig. 17.

Ad diametrum CD ducantur AF, BG ipsi CL parallelæ, ad CL vero ducantur AM, BN ipsi CD parallelæ, & occurrant AO, BO eidem CD in H, K punctis; & jungatur BH, compleaturque parallelogrammum HCNQ.

Quoniam igitur AH contingit Ellipsin, & AF ducta est ordinatim applicata diametro CD; erit CH ad CD, ut CD ad CF; &,

per

per Cor 1. præcedentis, est CD ad CL, ut CF ad BG, ergo ex æquo est CH ad CL, ut CD ad BG, seu QH, & sunt anguli DCL, CHQ æquales, alterni enim sunt; ergo parallelogrammum DL æquale est ipsi NH (14. 6.); est autem NH duplum trianguli CBH super eandem basin CH, & in iisdem parallelis; parallelogrammum vero ACBO duplum est ejusdem trianguli CBH, quoniam super eandem sunt basin CB, & in iisdem parallelis CB, AH: igitur est ACBO æquale ipsi NH, & ostensum fuit esse DL parallelogrammum æquale eidem NH; ergo & DL ipsi AB parallelogrammo est æquale; igitur æqualia sunt ipsorum quadrupla PRST, OVXY. *Q. E. D.*

PROP. XXI.

Si recta linea Ellipsin contingens, occurrat duabus diametris conjugatis; erit rectangulum contentum segmentis ipsius inter contactum & diametros, æquale quadrato ex semidiametro conjugata ei quæ per tactum transit.

FIG. 17. Contingat recta HZ Ellipsin in puncto A, occurratque diametris conjugatis CD, CL, in H, Z; sitque CB semidiameter conjugata ipsi CA: erit rectangulum HAZ æquale quadrato ex CB.

Ducantur enim AF, BG parallelæ diametro CL; & quoniam est HF ad FC, ut HA ad AZ, similia sunt rectangula HFC, HAZ; est vero HF ad HA, ut CG ad CB: igitur, quoniam similia sunt HFC, HAZ rectangula, quorum sciz. HF, HA sunt latera homologa, sintque quadrata ex CG, CB figuræ similes, erit (22. 6.) rectangulum HFC ad rectangulum HAZ, ut quadratum ex CG ad quadratum ex CB; est autem HFC rectangulum æquale (ipsi EFD, [Cor. 1. 17. huj.] hoc est,) quadrato ex CG, ergo & HAZ rectangulum æquale est quadrato ex CB.

Cor. Et manifestum est, si recta HAZ contingat Ellipsin, occurratque duabus diametris CH, CZ, fueritque rectangulum HAZ æquale quadrato ex semidiametro CB conjugata ei CA quæ per contactum transit; diametros CH, CZ esse sibi mutuo conjugatas.

PROP.

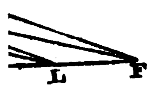


Fig. 15. N. 2.

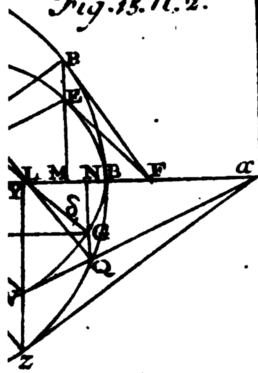
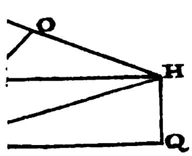


Fig. 17.



I . pag. 48.

PROP. XXII.

Si a puncto Ellipseos F, ducatur ad diametrum AB, ordinatim applicata FG; erit rectangulum contentum segmentis diametri ad quadratum ex ducta, ut diameter ad ipsius latus rectum. Fig. 18.

Sit enim BH æqualis lateri recto, & quoniam proportionales sunt diameter AB, ipsi conjugata DE, & latus rectum BH (Def. 9.) erit AB ad BH, ut quadratum ex AB ad quadratum ex DE (Cor. 20. 6.) hoc est, ut rectangulum AGB ad quadratum ex FG.

PROP. XXIII.

Si a puncto Ellipseos F, ducatur ordinatim applicata FG ad diametrum AB, & a vertice diametri ducatur ipsi ad rectos angulos, ipsiusque lateri recto æqualis, recta BH; erit quadratum ex ordinatim applicata, æquale rectangulo lateri recto adjacenti, latitudinem habens abscissam inter ordinatim applicatam, & verticem, quodque deficit figurâ simili, & similiter positâ ei quæ continetur diametro & latere recto. Fig. 18.

Jungatur AH, & a puncto G ducatur GK parallela ipsi BH, occurrens AH in K, & compleatur parallelogrammum KLHM; quoniam igitur est rectangulum AGB ad quadratum ex FG, ut (AB ad BH, hoc est, ut AG ad GK, hoc est, ut) rectangulum AGB ad rectangulum KGB, erit AGB rectangulum ad quadratum ex FG, ut idem AGB ad rectangulum KGB; quare quadratum ex FG, æquale est rectangulo KGB, quod quidem adjacet lateri recto BH, latitudinem habens GB abscissam sciz. inter ordinatam & verticem, deficitque (a rectangulo sciz. BM) figurâ KLHM simili, & similiter positâ ipsi BN, contentâ sciz. AB diametro, & latere recto BH; unde & *Ellipseôs* nomen, huic lineæ ab Apollonio inditum est.

Cor. Et perspicuum est, si a vertice diametri ducatur quævis BO æ-

æqualis lateri recto, quamvis diametro non ad rectos angulos fuerit; & jungatur AO, & per G ducatur GP parallela ipsi BO; fore PGB rectangulum æquale quadrato ex FG.

PROP. XXIV. PROBL. II.

Fig. 19. Datis positione & magnitudine, duabus rectis inæqualibus AB, DE se mutuo bifariam & ad angulos rectos secantibus in puncto C; Ellipsin describere, cujus ipsæ sint axes.

AB extremitate D minoris rectæ, ponatur DF æqualis dimidio majoris sciz. ipsi CB, & centro D, intervallo DF, describatur circulus, qui rectæ AB occurret in duobus punctis G, H, in quibus figantur extremitates fili ejusdem longitudinis cum recta AB; & ope styli describatur Ellipsis, ut in definitione prima ostensum fuit; erunt rectæ AB, DE ipsius axes.

Nam quoniam puncta G, H, sunt Ellipseos foci, & sunt æquales GC, CH (3. 3.) erit C ejusdem centrum (Def. 3. huj.) & quoniam est CA, seu CB æqualis longitudini dimidii fili, transibit Ellipsis per A, B; & propter GD æqualem CA transibit idem per D, ut patet ex Cor. 4. Prop. 1. hujus, & igitur per E, propter CD sciz. & CE æquales.

PROP. XXV. PROBL. III.

Fig. 19. Datâ positione & magnitudine rectâ AB, & puncto K; describere Ellipsin, cujus axis erit AB, quæque transibit per punctum K; oportet autem perpendicularem a dato puncto K cadere intra terminos rectæ AB.

DUcatur KL ad rectos angulos ipsi AB, & inveniatur recta DE talis, ut quadratum ex AB sit ad quadratum ex DE, ut rectangulum ALB ad quadratum ex KL; & ponatur DE perpendicularis ipsi AB, bifariamque se invicem secent, & axibus AB, DE describatur Ellipsis; transibit hæc per punctum K, per Cor. 2. Prop. 15.

PROP.

PROP. XXVI. PROBL. IV.

Datæ positione Ellipseos diametrum, centrum, axes & focos invenire.

DUcantur duæ rectæ parallelæ, Ellipsi terminatæ, & recta ipsas bifariam secans erit diameter; (Cor. 4. 13. hujus:) eodem modo inveniatur alia diameter, punctumque quo sibi invicem occurrunt erit centrum, (Def. 4.) vel punctum diametrum bifariam secans erit centrum.

Ad inveniendos axes, inveniatur centrum C, & in Ellipsi sumatur punctum quodvis A, & CA jungatur, centroque C, & intervallo CA describatur circulus AF; si hic totus extra Ellipsin cadere ponatur, erit CA maxima semidiametrorum, & proinde semiaxis major (7. hujus:) si vero D punctum sumatur, & circulus centro D, intervallo CD descriptus, totus intra Ellipsin cadere ponatur, erit CD minima semidiametrorum, & proinde semiaxis minor, (7. hujus:) si vero sumatur punctum G, & circulus centro C intervallo CG descriptus neque totus extra, neque totus intra Ellipsin cadat, recta CG erit neque semiaxis major nec minor; igitur circulus necessario Ellipsi rursus occurret; occurrat in H, & juncta GH bifariam secetur in K; erit juncta CK axis, & perpendicularis ipsi CK per centrum C, erit axis alter; nam quoniam bifariam secta est GH diametro CK, erit GH parallela contingenti AL per verticem ejus, & rectus est angulus CKG, & igitur CAL; quare est CKA axis (Cor. 4. 10. hujus.) Inveniuntur autem foci ut in Prop. 24. Fig. 20.

PROP. XXVII. PROBL. V.

Datis positione, & magnitudine, duabus Ellipseos diametris conjugatis; ejusdem axes invenire, atque ipsam describere.

SInt AB, CD diametri datæ, sibi mutuo occurrentes in centro E: & factum puta; scilicet sint FG, HK axes inveniendi, qui occurrant rectæ LM Ellipsin in A contingenti in punctis L, M; igitur rectangulum LAM æquale est quadrato ex CE dimidio diame- Fig. 21.

 tri

tri conjugatæ ipsi AB (21. huj.); & datur CE, & quadratum ex ipsa, quare datum est rectangulum LAM; sit huic æquale rectangulum EAN, & propter EA positione & magnitudine datam, dabitur AN positione & magnitudine; quoniam vero æqualia sunt rectangula LAM, EAN, erunt L, E, M, N puncta in circulo (Conv. 35. 3.); quare bifariam secta EN in O, erit centrum circuli in recta OP, quæ est ipsi EN ad rectos angulos (Cor. 1. 3.) idem vero centrum est in recta LM propter angulum rectum LEM (Cor. 5. 4.) & igitur in P ipsarum OP, LM intersectione; datum proinde est centrum P, & datum est E punctum, quare circulus centro P, intervallo PE descriptus, positione datur (Def. 6. datorum), & puncta L, M in quibus circumferentia ipsius, rectæ positione datæ AM occurrit; data enim est AM positione, quoniam per datum punctum A, parallela ducta est datæ positione CD (Cor. 2. 14. huj. & 28. dat.): ergo axes EL, EM positione dantur; ducatur AQ ad rectos angulos axi FG, & quoniam AL contingit Ellipsin, erunt EQ, EF, EL proportionales, (17. huj.) & dantur EQ, EL quare EF magnitudine datur, sed & positione: ergo axes FG, HK positione & magnitudine dantur. Et Ellipsis axe FG per punctum A descripta (per 25. huj.) erit ea cujus diametri conjugatæ sunt AB, CD.

Componetur vero ita: Producatur EA ad N, ita ut rectangulum EAN æquale sit quadrato ex CE; & bifariam secta EN in O, ducatur ipsi ad rectos angulos OP, quæ occurrat rectæ AL, quæ parallela est ipsi CE, in P; & centro P, intervallo PE, describatur circulus, cujus circumferentiæ occurrat AP in L, M punctis; junganturque EL, EM: denique ducatur AQ ad rectos angulos ipsi EL, & inter EQ, EL media proportionalis inveniatur EF (13. 6.) cui æqualis fiat EG; & per 25. hujus describatur Ellipsis, cujus axis sit F G, quæque transeat per punctum A. Erunt AB, CD hujus diametri conjugatæ; nam quoniam AQ perpendicularis est ad axem FG, & proportionales sunt EQ, EF, EL; continget AL sectionem in A (18. huj.); & quoniam CD parallela est contingenti LA, erit CD eadem positione cum diametro quæ ipsi AB conjugata est: angulus autem LEM in semicirculo rectus est, igitur EM est axis conjugatus axi FG, & rectangulum LAM æquale erit quadrato ex semidiametro, quæ ipsi AE conjugata est (21. huj.); idem vero rectangulum LAM, propter circulum (35. 3.).

3.) æquale est rectangulo EAN, hoc est, ex constructione, quadrato ex CE; ergo est CE semidiameter ipsi AE conjugata: quare Ellipsis transibit per C; & propter ED æqualem EC, & EB æqualem EA, eadem transibit per D, B puncta. Sunt igitur AB, CD diametri conjugatæ in Ellipsi descripta.

PROP. XXVIII. PROBL. VI.

Datâ positione & magnitudine diametro Ellipseos, datâque positione rectâ, quæ a dato in Ellipsi puncto ordinatim diametro applicatur; Ellipsin describere.

Sit AB diameter data, cui a dato in Ellipsi puncto R, ordinatim applicatur recta positione data RS. Fig. 21.

Bifariam secetur AB in E, & per E ducatur recta parallela ipsi RS, in qua sumantur æquales EC, ED, ita ut rectangulum ASB sit ad quadratum ex RS, ut quadratum ex AE ad quadratum ex EC vel ED; & ope præcedentis describatur Ellipsis, cujus diametri conjugatæ sint AB, CD; transibit hæc per punctum R, (Cor. 2. 15. huj.) & erit RS ordinatim applicata diametro AB, (Cor. 4. 14. huj.)

PROP. XXIX.

Si conus plano per axem secetur, & secetur altero plano conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, neque subcontrarie ponatur; planum autem in quo est basis coni, & secans planum conveniant secundum rectam lineam, quæ sit perpendicularis, vel ad basin trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: linea, quæ communis est sectio plani secantis & superficiei conicæ, erit Ellipsis, diametrum habens communem sectionem trianguli per axem & plani secantis.

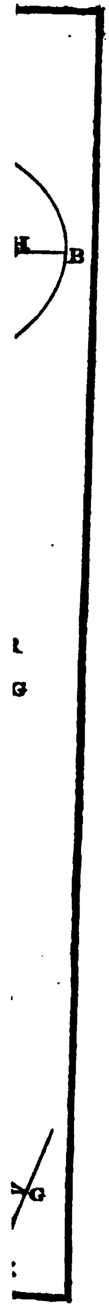
Sit conus, cujus vertex punctum A, basis BC circulus; seceturque plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ABC; Fig. 22.

&

& secetur altero plano conveniente cum utroque latere trianguli per axem, neque basi coni æquidistante, neque subcontrarie posito, atque faciat sectionem in superficie coni lineam DEF; communis vero sectio plani secantis, atque ejus in quo est basis coni, sit GH perpendicularis ad BC: erit linea DEF Ellipsis; & DF, quæ communis est sectio trianguli per axem & plani secantis, erit una ex ipsius diametris.

Sumatur enim in sectione DEF quodlibet punctum E, & per E ducatur EK ipsi HG parallela, usque ad DF; per K autem ducatur ipsi BC parallela LM; est igitur planum quod transit per EK, LM, plano per BC, GH, hoc est, ipsi basi coni, æquidistans, (15. 11.): ideoque (per 23. lib. 1.) planum per EK, LM est circulus, cujus diameter LM. Est autem (10. 11.) EK ad LM perpendicularis, quia & GH ad BG: rectangulum igitur LKM æquale est quadrato ex EK, (35. 3.) Similiter, si sumatur quodlibet aliud, in sectione DEF, punctum N, & ad DF ducatur NO, ipsi EK seu GH parallela; & per O ducatur PQ parallela ipsi BC; ostendetur rectangulum POQ quadrato ex NO æquale: quadratum igitur ex EK est ad quadratum ex NO, ut LKM rectangulum ad rectangulum POQ. Est autem LK ad PO, ut DK ad DO; & KM ad OQ, ut KF ad OF; quare rationes ex hisce æqualibus compositæ sunt inter se æquales: ideoque (23. 6.) est rectangulum LKM ad rectangulum POQ, ut DKF rectangulum ad rectangulum DOF; quare & quadratum ex EK est ad quadratum ex NO, ut rectangulum DKF ad rectangulum DOF. Describatur igitur Ellipsis, (per 28. huj.) cujus diameter sit DF, & in qua sit EK ordinatim applicata ipsi DF; & quoniam punctum E est ex constructione in hac Ellipsi, erit in ea punctum N, (per Cor. 3. 15. huj.); & similiter ostendetur omnia sectionis DEF puncta in eadem esse.

SECTI-


B
G
G

SECTIONUM CONICARUM

LIBER TERTIUS.

De Hyperbola.

DEFINITIONES.

I. SI ad punctum E in plano quovis ita affixa sit regulæ EH extremitas E, ut circa punctum hoc, tanquam centrum, libere circumagi possit; atque alteri regulæ extremitati H alligetur fili extremitas ipsâ regulâ brevioris, cujus fili altera extremitas ad punctum F in eodem plano affigatur; & adducatur filum ope styli G ad latus regulæ EH, & juxta ipsum tendatur; dein circumagatur regula, & interea filum stylo distentum semper regulæ applicatum teneatur: motu styli describetur linea quædam, quæ *Hyperbola* dicitur. Fig. 1.

Si vero ejusdem regulæ extremitas, quæ in puncto E affixa fuit, jam puncto F affigatur, & extremitas fili in puncto E figatur, eademque quæ prius peragantur; describetur alia linea, priori descri-

ptæ

ptæ opposita, quæ itidem *Hyperbola* dicitur: & ambæ simul *Hyperbolæ oppositæ* appellantur. Poterunt autem lineæ hæ ad distantiam a punctis E, F quavis datâ majorem extendi, sciz. si sumatur filum cujus longitudo major sit eâ distantiâ.

II. Puncta E, F dicuntur *Foci.*

III. Et punctum C, quod rectam inter focos bifariam secat, *Centrum Hyperbolæ* sive *Hyperbolarum oppositarum.*

IV. Quævis recta per centrum transiens, Hyperbolisque occurrens, vocatur *Diameter transversa*; & puncta, in quibus Hyperbolis occurrit, ipsius *Vertices*: Recta vero, quæ per centrum transit, & bifariam secat rectam aliquam Hyperbolis oppositis terminatam, vocatur *Diameter recta.*

V. Diameter autem quæ per focos transit, *Axis transversus.*

VI. Si ab extremitate axis transversi A vel *a* ponatur recta AD, distantiæ centri C a foco alterutro F æqualis, & centro A, intervallo AD, describatur circulus, occurrens rectæ quæ per centrum Hyperbolæ ad rectos angulos axi transverso ducta est in B, *b*; recta B*b* vocatur *Axis secundus.*

VII. Duæ diametri, quarum utraque bifariam secat omnes rectas alteri parallelas, & Hyperbolâ vel Hyperbolis oppositis utrinque terminatas, vocantur *Diametri conjugatæ.*

VIII. Recta quævis per centrum non transiens, Hyperbolâ vero vel Hyperbolis oppositis utrinque terminata, & a diametro bifariam secta, *Ordinatim applicari*, vel simpliciter *Ordinata* isti diametro, dicitur: Diameter etiam quæ parallela est rectæ alteri diametro ordinatim applicatæ, huic *ordinatim applicari* dicitur.

IX. Recta quæ in unico tantum puncto Hyperbolæ occurrit, utrinque vero producta extra Hyperbolas oppositas cadit, ipsam in eo puncto *contingere* dicitur.

PROP. I.

Fig. 1. Si a puncto G in Hyperbola ducantur ad focos duæ rectæ GE, GF, erit ipsarum excessus æqualis axi transverso A*a*.

Referat EGH regulam, & FGH filum, stylo quo describitur Hyperbola existente in puncto G; & ex ipsis EH, FGH ablatâ

latâ communi parte GH, erit excessus EG supra GF æqualis excessui longitudinis regulæ EH supra longitudinem fili FGH; idemque eveniet, ubicunque fuerit punctum G in Hyperbolis. Et quoniam vertices axis transversi, puncta sciz. A, *a*, sunt in ipsis, erit tum excessus AE supra AF, tum excessus *a*F supra *a*E æqualis eidem excessui longitudinis regulæ supra eam fili, seu excessui EG supra GF; & igitur inter se æquales erunt: sed excessus AE supra AF æqualis est excessui FE supra AF bis, addito sciz. utrinque AF; eodem modo excessus *a*F supra *a*E æqualis est excessui ejusdem FE supra *a*E bis: ergo FE superat AF bis eodem quo superat *a*E bis, ergo æquales sunt AF bis & *a*E bis, & ipsæ AF, *a*E; igitur excessus AE supra AF æqualis est excessui AE supra *a*E, hoc est, axi transverso *a*A: quare & excessus EG supra GF eidem axi æqualis est.

Cor. Et quoniam æquales sunt AF, *a*E, ut & CF, CE, erunt CA, C*a* æquales; seu, axis transversus bifariam secatur in centro.

PROP. II.

Si a puncto G ad focos Hyperbolarum ducantur duæ rectæ GE, GF, fueritque ipsarum excessus æqualis axi transverso *a*A, erit punctum G in una Hyperbolarum oppositarum. Fig. 2.

Sit GF minor rectarum GE, GF, & centro F, intervallo FG, describatur circulus occurrens ipsi FE in H, & sumatur GK æqualis ipsi GF, eritque ex hypothesi KE æqualis axi transverso A*a*; & quoniam FG, GE simul majores sunt ipsâ FE, erunt FG, GK simul majores ipsis FA, *a*E simul: quare dimidium illorum, sciz. FG seu FH, dimidio horum FA majus erit, & igitur Hyperbola ad partes A intra circulum cadit, cumque ipsa ad distantiam a foco quavis rectâ datâ majorem produci possit, (regula enim & filum poterunt sumi quavis datâ rectâ longiora) circulum necessario secabit. Secabit autem in puncto G; nam si non, circulum secet in alio puncto D, ad easdem sciz. partes axis ad quas est G, & jungantur DE, DF: & quoniam punctum D est in Hyperbola, erit excessus DE supra DF æqualis axi transverso A*a*, cui etiam excessus GE supra GF ex hypothesi æqualis est; & æquales sunt FG, FD; quare æ-

quales etiam sunt EG, ED, contra septimam primi Euclidis. Est igitur punctum G in Hyperbola.

PROP. III.

FIG. 2. Si a puncto L extra Hyperbolam ducantur ad focos rectæ LE, LF, erit ipsarum excessus minor axe transverso A*a*; si vero a puncto M intra Hyperbolam ducantur rectæ ad focos, major erit ipsarum excessus eodem axe A*a*: & contra.

NAm quoniam est punctum L extra, F vero intra Hyperbolam, recta LF ipsi necessario occurret; occurrat in G, & jungatur GE, eritque EL minor ipsis EG, GL simul: excessus igitur EL supra LF minor erit excessu ipsarum EG, GL simul supra eandem LF, hoc est, excessu EG supra GF, hoc est, axe transverso A*a*.

Sit jam punctum M intra Hyperbolam, & jungatur MF, & producatur ad O, ut sit FO æqualis axi transverso; junctâque EO, erit angulus EOF vel minor, vel non minor recto: sit primo minor recto, & ducatur EK, faciens angulum OEK æqualem angulo EOF, igitur anguli EOF, OEK simul minores sunt duobus rectis, ideoque EK occurret ipsi OF ad partes rectæ OE ad quas est F: occurrat ei in G, & propter æquales GE, GO, erit excessus GE supra GF æqualis ipsi FO, hoc est, axi transverso; quare est punctum G in Hyperbola, & proinde cadit punctum M inter G & F: &, ut in præcedente casu, ostendetur excessum EM supra MF majorem esse excessu EG supra GF, hoc est, axe transverso. Sit rursus punctum N intra Hyperbolam, & juncta NF & producta ad P, ut FP æqualis sit axi transverso, sit angulus NPE non minor recto: ergo juncta NE major est NP; quare excessus NE supra NF major est FP, hoc est, axe transverso.

Et contra: Si excessus rectarum, quæ a puncto aliquo ad focos ducuntur, minor vel major fuerit axe transverso, erit punctum hoc extra vel intra Hyperbolas.

COR. Hinc, si per verticem A axis transversi ducatur recta ipsi ad rectos angulos, cadet hæc tota extra Hyperbolam, ipsamque proinde continget.

Sumatur

Sumatur enim in ipsa punctum quodvis Q, & jungantur QF, QE, ipsi vero AF ponatur in axe æqualis AR, & QR jungatur; quoniam igitur est AR æqualis AF, hoc est, *a*E, æqualis erit RE axi transverso A*a*; æquales etiam sunt QF, QR: est vero QE minor ipsis QR, RE simul, & igitur excessus QE supra QR, seu QF, minor est ipsâ RE, hoc est, axe transverso; quare punctum Q est extra Hyperbolam, ideoque recta AQ extra ipsam cadit. Fig. 2.

PROP. IV.

Quadratum ex dimidio axis secundi æquale est rectangulo contento rectis inter focum & vertices axis transversi.

Sit A*a* axis transversus, C centrum, E, F foci, & B*b* axis secundus, quem in centro C bifariam secari ex definitione ejus manifestum est; jungatur AB; & quoniam æquales sunt AB, CF, (Def. 6.) erunt quadrata ex AC, CB simul æqualia quadrato ex CF, hoc est, (6. 2.) quadrato ex AC, & rectangulo AF*a* simul; quare, ablato quadrato communi ex AC, erit quadratum ex CB æquale rectangulo AF*a*. Fig. 1.

PROP. V.

Si a puncto Hyperbolæ G ducatur ad rectos angulos axi transverso A*a* recta GD; & ab eodem ducatur recta GF ad focum puncto G propiorem; erit semiaxis transversus CA ad distantiam foci a centro CF, ut distantia perpendicularis a centro CD ad summam semiaxis transversi & rectæ ad focum ductæ. Fig. 3, 4.

Ducatur GE ad alterum focum, & in axe *a*A producto ponatur AH æqualis GF, centroque G & distantiâ GF describatur circulus, axi *a*A rursus occurrens in K, & rectæ EG in L, M punctis; & quoniam EF dupla est ipsius CF, & FK dupla FD, erit & EK dupla ipsius CD; & quoniam EL seu A*a* dupla est ipsius CA, & LM dupla ipsius GF seu AH, erit & EM dupla ipsius CH: propter circulum vero est EL seu A*a* ad EF, ut EK ad EM, & sumptis ipsarum dimidiis, erit CA ad CF, ut CD ad CH.

PROP. VI.

FIG. 3, 4. Iisdem manentibus, si ab A vertice axis transversi puncto G propiore ponatur in axe producto recta AH, distantiæ puncti G a foco F eidem vertici propiore æqualis; erit quadratum ex perpendiculari GD æquale excessui rectanguli EHF contenti segmentis inter H, terminum rectæ AH, & focos, supra rectangulum AD*a* contentum segmentis inter perpendicularem & vertices axis interceptis.

NAm quoniam recta CH utcunque secta est in A, erunt quadrata ex CA, CH simul æqualia rectangulo ACH bis & quadrato ex AH, (7. 2.) hoc est, propter CA, CF, CD, CH proportionales, rectangulo FCD bis & quadrato ex AH seu GF, hoc est, rectangulo FCD bis & quadratis ex FD, DG, hoc est, quadratis ex FC, CD & DG, (7. 2.) quare duo quadrata ex CA, CH æqualia sunt tribus ex FC, CD, DG quadratis; & demptis utrinque quadratis ex CA, CF, reliquum sciz. rectangulum EHF, reliquo sciz. rectangulo AD*a* & quadrato ex DG erit æquale, (6. 2.)

PROP. VII.

FIG. 3, 4. Si a puncto Hyperbolæ G ducatur recta parallela axi secundo B*b*, transverso A*a* occurrens in D; erit quadratum ex axe transverso ad quadratum ex secundo, ut rectangulum contentum segmentis transversi inter parallelam & vertices ejus ad quadratum ex ducta.

DUcantur ad focos rectæ GE, GF, & minori ipsarum GF ponatur æqualis AH, a vertice sciz. axis transversi foco F propiore; & quoniam proportionales sunt CH, CD, CF, CA, erunt & ipsarum quadrata proportionalia; hoc est, ut totum, sciz. quadratum ex CH, ad totum, sciz. quadratum ex CD, ita quadratum ex CF ad quadratum ex CA: quare erit reliquum EHF rectangulum ad reliquum AD*a*, ut quadratum ex CF ad quadratum ex CA; & dividendo, erit excessus rectanguli EHF supra AD*a* ad rectangulum AD*a*,

ADa, ut rectangulum AFa ad quadratum ex CA, hoc est, (per præcedentem & Prop. 4. huj.) erit quadratum ex GD ad rectangulum ADa, ut quadratum ex CB ad quadratum ex CA; & invertendo, est quadratum ex CA ad quadratum ex CB, ut rectangulum ADa ad quadratum ex GD.

Cor. Hinc quadrata rectarum, quæ a punctis Hyperbolæ vel Hyperbolarum oppositarum ducuntur parallelæ axi secundo, sunt inter se ut rectangula contenta segmentis inter ipsas & vertices axis transversi interceptis; ut in Ellipsi ostensum fuit.

PROP. VIII.

Si a puncto Hyperbolæ G ducatur recta parallela axi transverso Aa, occurrens axi secundo in N; erit quadratum ex axe secundo ad quadratum ex axe transverso, ut summa quadratorum ex semiaxe secundo & segmento ipsius inter ductam & centrum ad quadratum ex ducta. Fig. 4.

Nam per præcedentem est quadratum ex CA ad quadratum ex CB, ut rectangulum ADa ad quadratum ex GD; & igitur invertendo & per 12. 5. est quadratum ex CB ad quadratum ex CA, ut summa quadratorum ex CB, GD ad quadratum ex CA una cum rectangulo ADa, hoc est ut summa quadratorum ex CB, CN ad quadratum ex CD seu GN.

Cor. Hinc, si a duobus punctis Hyperbolæ vel Hyperbolarum oppositarum ducantur ad axem secundum duæ rectæ, axi transverso parallelæ; erit quadratum unius ad quadratum alterius, ut summa quadratorum ex semiaxe secundo & distantia primæ parallelæ a centro ad summam quadratorum ex semiaxe secundo & distantia alterius a centro.

PROP. IX.

Recta utrinque terminata Hyperbola vel Hyperbolis oppositis, & parallela alterutri axium, bifariam secatur ab altero; seu axes sunt diametri conjugatæ.

Primo,

Fig. 5. PRimo, Sit recta DE parallela axi secundo B*b*, occurratque axi transverso in F; igitur est quadratum ex DF ad quadratum ex EF, ut rectangulum AF*a* ad idem rectangulum AF*a* (Cor. Prop. 7.) quare æquales sunt DF, FE.

Secundo, Sit DG parallela axi transverso A*a*, occurratque axi secundo B*b* in K; igitur est quadratum ex DK, ad quadratum ex KG; ut summa quadratorum ex CB, CK, ad summam eorundem quadratorum ex CB, CK (Cor. præced.); quare æquales sunt DK, GK.

PROP. X.

Recta Hyperbolâ vel hyperbolis oppositis terminata, & ab alterutro axe bifariam secta, parallela est alteri.

Fig. 5. PRimo, Bifariam secetur recta DE axe transverso in F, & ducantur DK, EL eidem axi parallelæ, occurrentes axi secundo in K, L punctis; quoniam igitur æquales sunt DF, FE, æquales erunt KC, CL; quadratum autem ex DK est ad quadratum ex EL, ut quadrata ex CB, CK simul ad quadrata ex CB, CL simul; æquales igitur sunt DK, EL, & sunt parallelæ; quare & parallelæ sunt DE, KL (33. 1.)

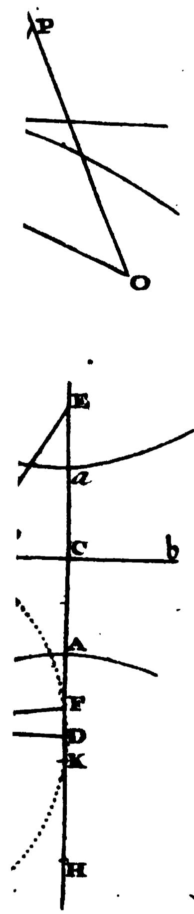
Secundo, Bifariam secetur DG axe secundo in K, & ducantur DF, GM, eidem axi parallelæ, & transverso occurrentes in F, M; & quoniam æquales sunt DK, KG, æquales erunt FC, CM, & igitur FA, *a*M; est autem quadratum ex DF ad quadratum ex GM, ut rectangulum AF*a*, ad rectangulum AM*a*; æqualia vero sunt AF*a*, AM*a* rectangula, æquales igitur sunt rectæ DF, GM, & sunt parallelæ, quare parallelæ sunt DG, FM (33. 1.)

Cor. Ex demonstratione liquet rectas DF, GM, quæ parallelæ sunt alterutri axi B*b*, & abscindunt æqualia segmenta FC, MC alterius axis inter ipsas & centrum, æquales esse inter se: eodem modo æquales sunt rectæ DK, EL, quæ parallelæ sunt axi A*a*, & abscindunt æqualia segmenta CK, CL.

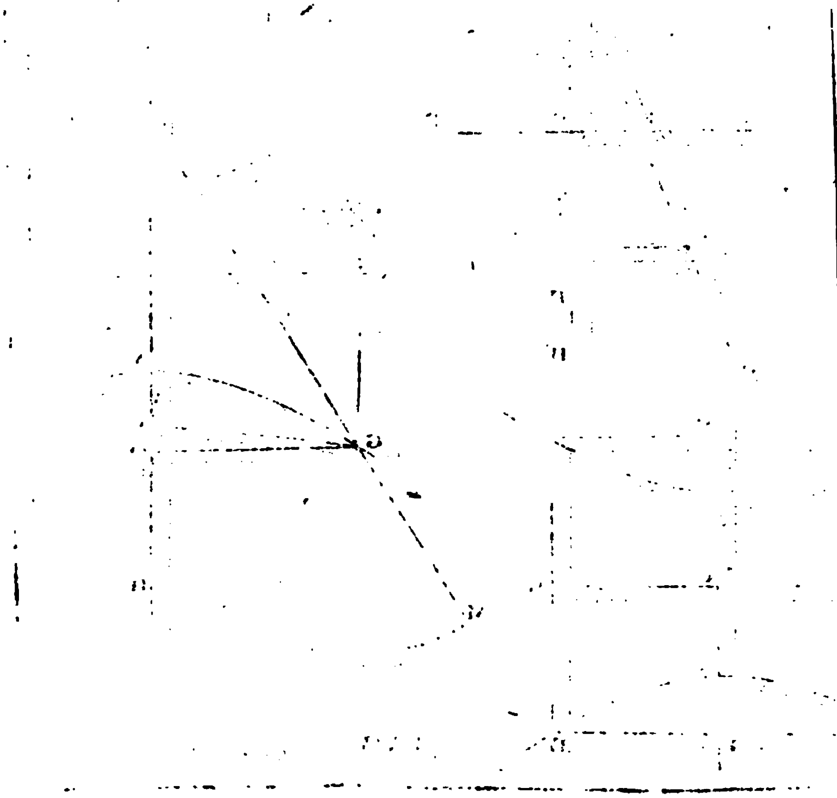
Et contra: Si DF, GM sint æquales, abscindent æqualia segmenta FC, MC: similiter si æquales sint DK, EL abscindent æqualia segmenta CK, CL.

PROP.

Fig. 2.



62.



PROP. XI.

Quævis recta DC perpendicularis axi transverso, ipsique infra verticem occurrens, Hyperbolæ duobus in punctis occurret. Fig. 67.

Sit Aa axis transversus, & E, F foci, occurratque perpendicularis axi transverso in C, & ipsi CF, distantiæ sciz. puncti C a foco ipsi propiore, ponatur CG æqualis, axi vero transverso Aa ponatur æqualis EK ab altero foco. Si igitur punctum C cadat infra focum F, manifestum est EK minorem esse EG; in casu vero quo punctum C cadit supra F, quoniam æquales sunt Aa, EK, erit AK æqualis aE, hoc est, ipsi AF, & ex hypothesi est FC minor FA, & igitur FC bis minor FA bis, hoc est, FG minor est FK, & proinde EK minor est EG: fiat vero ut EK ad EF, ita EG ad quartam EH; & quoniam EK minor est utraque ipsarum EF, EG, & igitur multo minor quam EH; erunt EK, EH simul majores ipsis EF, EG simul (25. 5.); & ablatâ utrinque EK bis, erit KH major ipsis KF, KG simul, hoc est, major KC bis, quoniam sciz. æquales sunt CF, CG; igitur bifariam sectâ KH in L, erit KL major ipsâ KC, & igitur punctum L cadit infra rectam CD, & circulus, centro E intervallo EL descriptus, ipsi CD necessarie occurret duobus in punctis D, *d*; centro D intervallo DF describatur alter circulus qui transibit per punctum G, occurrat vero junctæ DE in M, N; & quoniam est EK ad EF, ut EG ad EH, erit rectangulum HEK æquale rectangulo FEG, hoc est, propter circulum rectangulo MEN; & æquales sunt ED, EL, & igitur quadrata ex ipsis æqualia; ex quibus ablatis æqualibus rectangulis MEN, HEK, erit (6. 2.) reliquum quadratum ex DM, seu DF, æquale reliquo quadrato ex KL, æquales igitur sunt rectæ DM, KL; quibus ex æqualibus ED, EL ablatis, erit reliqua EM reliquæ EK seu axi transverso *Aa* æqualis, & est EM excessus DE supra DF, ergo est punctum D in Hyperbola (2. hujus.). Eodem modo ostendetur punctum *d* esse in Hyperbola. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 6. 7.

D E-

DEFINITIO X.

FIG. 8. SI per verticem axis transversi ducatur recta parallela & æqualis axi secundo, sitque ab axe transverso bifariam secta, rectæ per centrum & parallelæ terminos ductæ *Asymptoti* vocantur.

COR. 1. Oppositarum sectionum asymptoti sunt communes. Nam sint CD, CE asymptoti Hyperbolæ AF, & ducatur per verticem A axis transversi recta DAE axi secundo B*b* parallela, & per alterum verticem *a* ducatur ipsi DE parallela *dae*; quoniam igitur CD, CE sunt asymptoti, erit utraque DA, AE parallela & æqualis semiaxi secundo CB; & propter parallelas DE, *de*, & æquales CA, C*a*, erunt *ad*, *ae*, ipsis AD, AE, & igitur semiaxi secundo æquales & parallelæ; quare C*d*, C*e* sunt asymptoti Hyperbolæ oppositæ *a*.

COR. 2. Asymptoti parallelæ sunt rectis terminos axium conjungentibus, nam junctæ AB, A*b*, parallelæ erunt ipsis CE, CD (33. 1.)

PROP. XII.

Asymptoti cum Hyperbola non conveniunt.

FIG. 8. SIt Hyperbola, cujus axis transversus A*a*, centrum C, & per A ducta perpendiculari ipsi CA, in ipsâ sumantur AD, AE, semiaxi secundo CB æquales; erunt igitur junctæ CD, CE asymptoti; &, si fieri potest, conveniat CD cum Hyperbola in F, & per F ducatur parallela ipsi DA, occurrens axi A*a* in G; & quoniam est rectangulum AG*a* ad quadratum ex GF (ut quadratum ex CA ad quadratum ex CB seu AD [7. hujus,] hoc est) ut quadratum ex CG ad quadratum ex GF, erit rectangulum AG*a* æquale quadrato ex CG, *Q. E. A.* non igitur convenit Hyperbola cum asymptoto in F, & similiter ostendetur neque ipsam convenire in alio quovis puncto.

PROP. XIII.

FIG. 8. Si per punctum Hyperbolæ F ducatur recta KFL parallela axi secundo, & conveniens cum asymptotis in K, L;

L; erit rectangulum contentum rectis lineis quæ inter asymptotos & Hyperbolam interjiciuntur, æquale quadrato quod fit a dimidio axis secundi CB.

PEr A verticem axis transversi ducatur DAE, asymptotis conveniens in D, E, occurratque KL eidem axi in G; est igitur utraque AD, AE æqualis & parallela semiaxi secundo: ducatur ad axem secundum recta FM parallela ipsi CA, &, per Prop. 8. hujus, erit quadratum ex CB, seu AD, ad quadratum ex CA, ut quadrata ex CB, CM simul ad quadratum ex FM, seu GC; & est quadratum ex AD ad quadratum ex AC, ut quadratum ex KG ad quadratum ex GC; quare quadrata ex CB, CM simul sunt ad quadratum ex GC, ut quadratum ex KG ad idem quadratum ex GC; quadrata igitur ex CB, CM simul æqualia sunt quadrato ex KG; auferantur æqualia quadrata ex CM, FG, & erit reliquum quadratum ex CB æquale reliquo rectangulo KFL (6. 2.) similiter si KL occurrat Hyperbolæ rursus in H, ostendetur rectangulum KHL æquale fore quadrato ex CB.

PROP. XIV.

Si recta linea, Hyperbolæ vel Hyperbolis in duobus punctis occurrens, cum asymptotis conveniat; erunt rectangula, contenta rectis quæ inter asymptotos & Hyperbolam interjiciuntur, inter se æqualia; & rectæ inter Hyperbolam & asymptoton ex utraque parte interjectæ æquales erunt.

SIt recta linea AB, quæ occurrat Hyperbolæ vel Hyperbolis in A, B, & asymptotis in C, D punctis; erunt rectangula CAD, CBD æqualia; & ipsæ CA, BD æquales. FIG. 9.

Per A, B puncta ducantur rectæ axi secundo parallelæ, asymptotis occurrentes in E, F, & G, H; & quoniam, per præcedentem, utrumque rectangulum EAF, GBH æquale est quadrato ex semiaxe secundo, erunt & inter se æqualia; igitur est EA ad GB, ut BH ad AF; est autem, propter æquiangula triangula, EA ad GB, ut CA ad CB; & BH ad AF, ut BD ad AD; ergo ut CA

ad CB, ita BD ad AD; rectangulum igitur CAD æquale est rectangulo CBD: &, addito vel dempto communi rectangulo quod AC, BD continetur, erit rectangulum CAB æquale rectangulo ABD; quare æquales sunt rectæ AC, BD.

PROP. XV.

Si per duo puncta in Hyperbola vel Hyperbolis ducantur duæ rectæ parallelæ, quæ asymptotis occurrunt; erunt rectangula, contenta earundem segmentis inter puncta & asymptotos, inter se æqualia.

Fig. 10. n. 1. Sint A, B puncta in Hyperbola vel Hyperbolis, per quæ ducantur CD, EF sibi invicem parallelæ, occurrentes asymptotis OC, OD, in C, D & E, F punctis; erunt rectangula CAD, EBF inter se æqualia.

Per A, B puncta ducantur ad asymptotos rectæ GAH, KBL axi secundo parallelæ; & quoniam, per 13. præcedentem, utrumque rectangulum GAH, KBL æquale est quadrato ex semiaxe secundo, erunt & inter se æqualia; est igitur GA ad KB, ut BL ad AH: est autem, propter æquiangula triangula GAC, KBE, GA ad KB, ut CA ad EB; &, propter æquiangula triangula LBF, HAD, est BL ad AH, ut BF ad AD; ergo ut CA ad EB, ita est BF ad AD; ideoque rectangulum CAD æquale est rectangulo EBF.

Fig. 10. n. 2. Cor. 1. Et si per centrum ducatur AOM utrique Hyperbolæ occurrens, quæque parallela sit rectæ EBF, erit quadratum ex alterutro ipsius segmento AO inter centrum & Hyperbolam æquale rectangulo EBF: demonstratur eodem modo quo Propositio. Et contra: Si quadratum ex AO æquale fuerit rectangulo EBF, erit punctum A in una Hyperbolarum, si punctum B in una ipsarum fuerit; & punctum B erit in earum una, si punctum A in una ipsarum fuerit.

Cor. 2. Ergo quævis recta per centrum ducta, & Hyperbolis terminata, bifariam in centro secatur.

Fig. 10. n. 1. Cor. 3. Si CD, EF Hyperbolæ vel oppositæ Hyperbolæ rursus occurrant in M, N punctis; erit rectangulum ACM, vel ADM æ-

æquale rectangulo BEN, vel BFN; propter æquales scil. AC, MD, & BF, NE.

Cor. 4. Et quoniam ostensum fuit quadratum ex semidiametro AO vel OM æquale esse rectangulo EBF, hoc est, ipsi BEN; erit BE ad AO, ut AO ad EN; & proinde est BN major AO bis, seu AM (25. 5.) hoc est, diameter transversa minor est quavis rectâ ipsi parallelâ & Hyperbolis terminatâ. Fig. 10. n. 2.

Cor. 5. Si in recta BN Hyperbolis terminata, sumantur puncta E, F, quæ faciunt utrumque rectangulum BEN, BFN æquale quadrato ex semidiametro AO, quæ ipsi BN parallela est; erunt puncta E, F ad asymptotos, ut patet.

PROP. XVI.

Si a puncto in Hyperbola ducantur ad asymptotos quævis duæ rectæ, & ab alio quovis puncto in eadem vel opposita Hyperbola ducantur ad asymptotos aliæ rectæ prioribus parallelæ; erit rectangulum contentum primò ductis, æquale rectangulo contento reliquis ductis.

Sint A, B puncta in Hyperbola vel Hyperbolis, & per A ducantur ad asymptotos rectæ AC, AD; per B vero ducantur iisdem parallelæ BE, BF: erunt rectangula CAD, EBF inter se æqualia. Fig. 11.

Per A, B ductis ad asymptotos rectis GAH, KBL axi secundo parallelis, demonstrabitur Propositio iisdem verbis quibus præcedens.

Cor. 1. Hinc, si a duobus punctis in Hyperbola vel Hyperbolis ducantur ad asymptoton vel utramque asymptoton duæ rectæ, parallelæ alteri asymptoto; erunt rectangula contenta ductis, & abscissis inter ipsas & centrum, inter se æqualia.

Sint puncta A, B, per quæ ducantur AC & BE vel BF, parallelæ asymptotis; erit rectangulum contentum ductâ AC, & abscissâ CO inter ipsam & centrum O, æquale rectangulo BEO seu BFO: nam, completis parallelogrammis ACOD, BEOF, erunt rectangula CAD, EBF, hoc est, ACO, BEO æqualia.

Cor. 2. Et quoniam æqualia sunt CAD, EBF rectangula, erit

AC ad BE, ut BF ad AD, & æquiangula sunt parallelogramma ACOD, BEOF, ideoque inter se sunt æqualia (14. 6.)

PROP. XVII.

Quævis recta per centrum ducta intra angulum asymptotis comprehensum, Hyperbolæ occurrit.

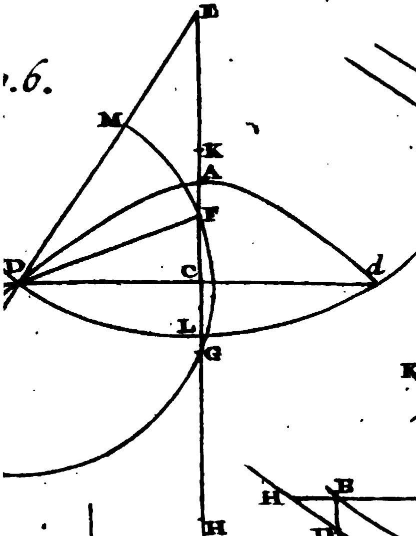
FIG. 12. Sint AB, AC asymptoti, & AD semiaxis transversus, sitque AE quævis recta ducta per centrum A intra angulum BAC; occurret hæc Hyperbolæ. Si enim non occurrat, ducatur per D recta BDC axi secundo parallela, asymptotis occurrens in B, C; ducatur etiam DF parallela ipsi AB, quæ conveniat cum AE in F; &, sumptâ BG rectæ DF æquali, jungatur GF, quæ ipsi BD æqualis & parallela erit (33. 1.), ideoque & axi transverso ad rectos angulos occurret, & propterea Hyperbolam secabit (11. hujus); secet in H, ad eas scil. partes AD ad quas est punctum F, alteri vero asymptoto occurrat in K; quoniam igitur punctum F est extra Hyperbolam, erit GH major GF, hoc est, ipsâ BD; & est HK major DC, quare rectangulum GHK majus est rectangulo BDC, hoc est, quadrato ex BD; idem vero rectangulum GHK eidem quadrato ex BD æquale est (per Prop. 13. huj.) quod est absurdum. Ergo AE recta Hyperbolæ necessario occurrit.

PROP. XVIII. *Quæ XIII. est lib. 2. Apollonii.*

Si in loco ab asymptotis & Hyperbola terminato ducatur quævis recta linea asymptoto parallela; in uno tantum puncto cum Hyperbola conveniet.

Sit Hyperbola, cujus asymptoti AL, AM, sumaturque aliquod punctum N, & per N ipsi AL parallela ducatur NO; conveniet NO cum Hyperbola.

FIG. 12. Si enim fieri potest, non conveniat, & sumatur punctum quodvis in sectione per quod ducantur PQ, PM ipsis AM, AL parallelæ; & rectangulo MPQ æquale sit ANO; junctaque AO producatur; hæc igitur cum Hyperbola conveniet (17. hujus); conveniat autem in puncto R, & per R ducantur RS, RT ipsis AM, AL pa-



.6.

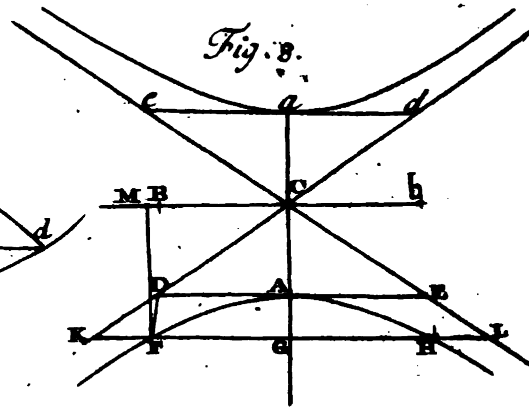


Fig. 8.

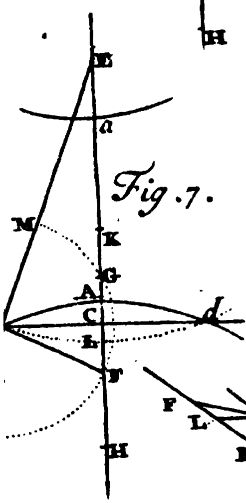


Fig. 7.

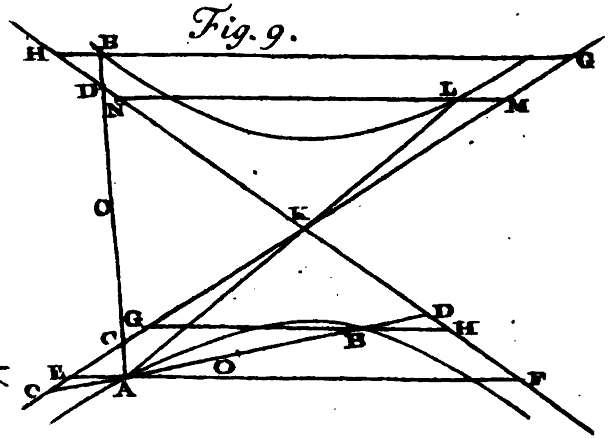


Fig. 9.

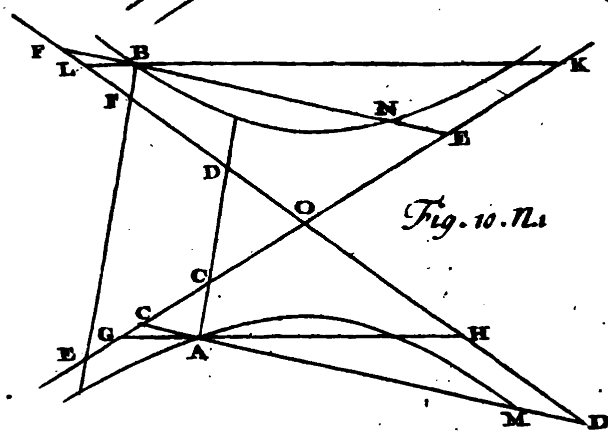


Fig. 10. N. 1

K. pag. 68.

parallelæ; ergo rectangulum MPQ æquale est rectangulo TRS; (16. hujus); ponitur autem & rectangulm ANO eidem MPQ æquale; rectangulum igitur TRS, hoc est rectangulum ATR, rectangulo ANO æquale erit; quod fieri non potest: siquidem RT major est quam NO; & AT major quam AN: quare NO conveniet cum Hyperbola; conveniat in V, & ostendendum est eam in alio puncto Hyperbolæ non convenire. Nam, si fieri potest, conveniat etiam in X; & per V, X ipsi AM parallelæ ducantur VY, XL; ergo rectangulum NVY rectangulo NXL est æquale; quod est absurdum: igitur in alio puncto præter V non conveniet cum Hyperbola recta NO.

Cor. 1. Ex demonstratione liquet rectam per centrum inter asymptotos ductam, in unico tantum puncto Hyperbolæ occurrere. Nam si AR occurreret Hyperbolæ in alio puncto O, essent rectangula RTA, ONA æqualia: quod est absurdum.

Cor. 2. Et si recta Hyperbolæ vel oppositis Hyperbolis in duobus punctis occurrat, utrique asymptoto occurret. Nam si alteri ipsarum esset parallela, occurreret Hyperbolæ tantum in uno puncto.

Cor. 3. Si per punctum N in asymptoto ducatur recta NO alteri parallela, & in ipsa sumatur punctum V intra angulum Hyperbolam continentem, faciens rectangulum VNA contentum ductâ inter asymptoton & punctum, & abscissâ inter ipsam & centrum, æquale rectangulo PMA contentum ductâ a quovis Hyperbolæ puncto P parallelâ asymptoto, & abscissâ inter ipsam & centrum, erit punctum N in Hyperbola. Nam si NO non occurrat Hyperbolæ in V, occurrat, si fieri potest, in X: igitur rectangulum XNA rectangulo PMA, hoc est, rectangulo VNA, erit æquale; quod est absurdum: ergo est punctum V in Hyperbola.

PROP. XIX.

Si per punctum in Hyperbola A ducatur recta utrique asymptoto in B, C occurrens, & ab utrovis punctorum B, C puta C, ponatur recta CD æqualis segmento ductæ inter punctum in Hyperbola A & reliquum punctum B; ita sciz. ut terminus D rectæ CD, & punctum in Hyperbola Fig. 13.

perbola A, sint simul inter puncta B, C, vel simul extra eadem: erit, in primo casu, punctum D in Hyperbola in qua est A; in altero vero, erit punctum D in Hyperbola opposita.

PEr A, D ducantur ad alterutram asymptoton GB, rectæ AE, DF alteri parallelæ; & propter parallelas, erit BA ad DC, ut BE ad FG: æquales autem sunt BA, DC, quare & BE, FG; ideoque BF, EG sunt æquales: & propter æquiangula triangula est AE ad DF, ut BE ad BF, hoc est, FG ad EG; igitur rectangulum AEG rectangulo DFG est æquale: & punctum A est in Hyperbola; ergo & punctum D est in Hyperbola, sciz. cujus asymptotos est GF, per Cor. 3. præced.

PROP. XX.

Si utramque rectarum continentium angulum, qui deinceps est angulo Hyperbolam continenti, secet recta linea; in uno tantum puncto cum utraque Hyperbola conveniet.

Fig. 13. SIt Hyperbola, cujus asymptoti GB, GC, & ipsas secet recta BC in B & C punctis; & in Hyperbolis sumpto quovis puncto H, per ipsum ducatur HIK ipsi BC parallela, asymptotis occurrens in I, K; & rectæ BC applicetur rectangulum æquale rectangulo IHK, excedens quadrato, (29. 6.); sintque A, D applicationis puncta, erunt A, D puncta in Hyperbolis. Ducantur enim per A, H rectæ AE, AN, & HL, HM asymptotis parallelæ; & quoniam parallelæ sunt AC, HK, sintque rectangula BAC, KHI æqualia, erit BA ad KH, ut HI ad AC: propter æquiangula vero triangula est BA ad KH, ut AE ad HL; & HI ad AC, ut HM ad AN; ergo est AE ad HL, ut HM ad AN; & igitur est rectangulum EAN, seu AEG, æquale rectangulo MHL, seu HLG: & est H punctum in Hyperbola, quare & A est in eadem vel opposita Hyperbola; eodem modo erit D punctum in Hyperbola opposita ei in qua est A: manifestum autem est rectam BC Hyperbolis in alio puncto non occurrere.

PROP.

PROP. XXI.

Si utramque rectarum Hyperbolam continentium secet recta linea, fueritque quadratum quod a dimidio ipsius describitur, non minus rectangulo contento segmentis rectæ lineæ, quæ per punctum quodlibet Hyperbolæ parallelà ducitur rectæ secanti, inter Hyperbolam & asymptotos, occurret recta ducta Hyperbolæ.

Sit Hyperbola, cujus asymptoti OC, OD, ipsasque secet recta GH, occurret hæc Hyperbolæ, scil. si quadratum ex ipsius dimidio non minus fuerit rectangulo prædicto. Fig. 11.

Sumatur punctum quodvis M in Hyperbola, & per ipsum ducatur recta ipsi GH parallela asymptotis occurrens in K, L; & ad rectam GH applicetur rectangulum æquale rectangulo KML, deficiens quadrato, quod fieri potest ex determinatione, (27. 28. 6.) sitque A punctum applicationis, erit punctum hoc in Hyperbola. Nam, ductis per A, M puncta rectis AC, MN asymptotis parallelis, erit rectangulum ACO æquale rectangulo MNO, quoniam scil. æqualia sunt GAH, KML rectangula, ut in præced. ostensum fuit, & est punctum M in Hyperbola, ergo & punctum A est in eadem. Et similiter ostendetur alterum applicationis punctum esse in Hyperbola: si autem quadratum ex dimidio ipsius GH æquale fuerit rectangulo KML, solum punctum bifariam secans GH in Hyperbola erit.

PROP. XXII. *Quæ XIV. est lib. 2. Apollonii.*

Asymptoti & Hyperbola, in infinitum productæ, ad seipsas propius accedunt; & ad intervallum proveniunt minus quolibet dato intervallo.

Sit Hyperbola, cujus asymptoti AB, AC, & datum intervallum sit D; sintque E, F duo puncta in Hyperbola, per quæ ducantur GEH, CFL inter se parallelæ, & asymptotis occurrentes in G, H & C, L punctis; jungaturque AE occurrens CL in K: quoniam igitur rectangulum GEH rectangulo CFL est æquale, (15. huj.) eris Fig. 14.

rit ut LF ad HE, ita EG ad FC: ſed LF major eſt ipsâ HE, quoniam ſciz. KL ipsâ HE eſt major; ergo & EG ipsâ FC eſt major. Similiter demonſtrabitur eas, quæ deinceps ſequuntur, minores eſſe. Itaque ſumatur intervallum GM minus intervallo D, & per M ipſi AC parallela ducatur MN, ergo MN cum Hyperbola conveniet, (18. huj.) conveniat in N, perque N ducatur ONB parallela ipſi GH; quare ON æqualis erit GM, & propterea intervallo D minor erit.

PROP. XXIII.

Si recta linea aſymptotis intercepta Hyperbolæ occurrat, & in puncto occursûs bifariam ſecetur, ipſa Hyperbolam continget: & ſi Hyperbolam contingat, bifariam in puncto contactûs ſecabitur.

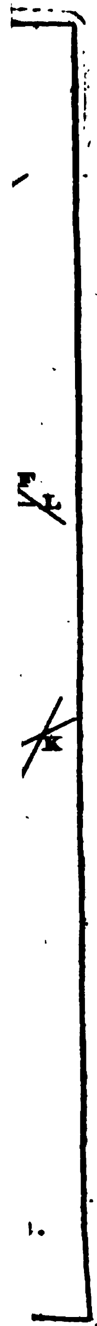
Fig. 15. n. 1. SIt Hyperbola, cujus aſymptoti AB, AC, & ipſi occurrat recta BC aſymptotis terminata, in puncto D; ſitque bifariam ſecta in D: recta BC Hyperbolam continget.

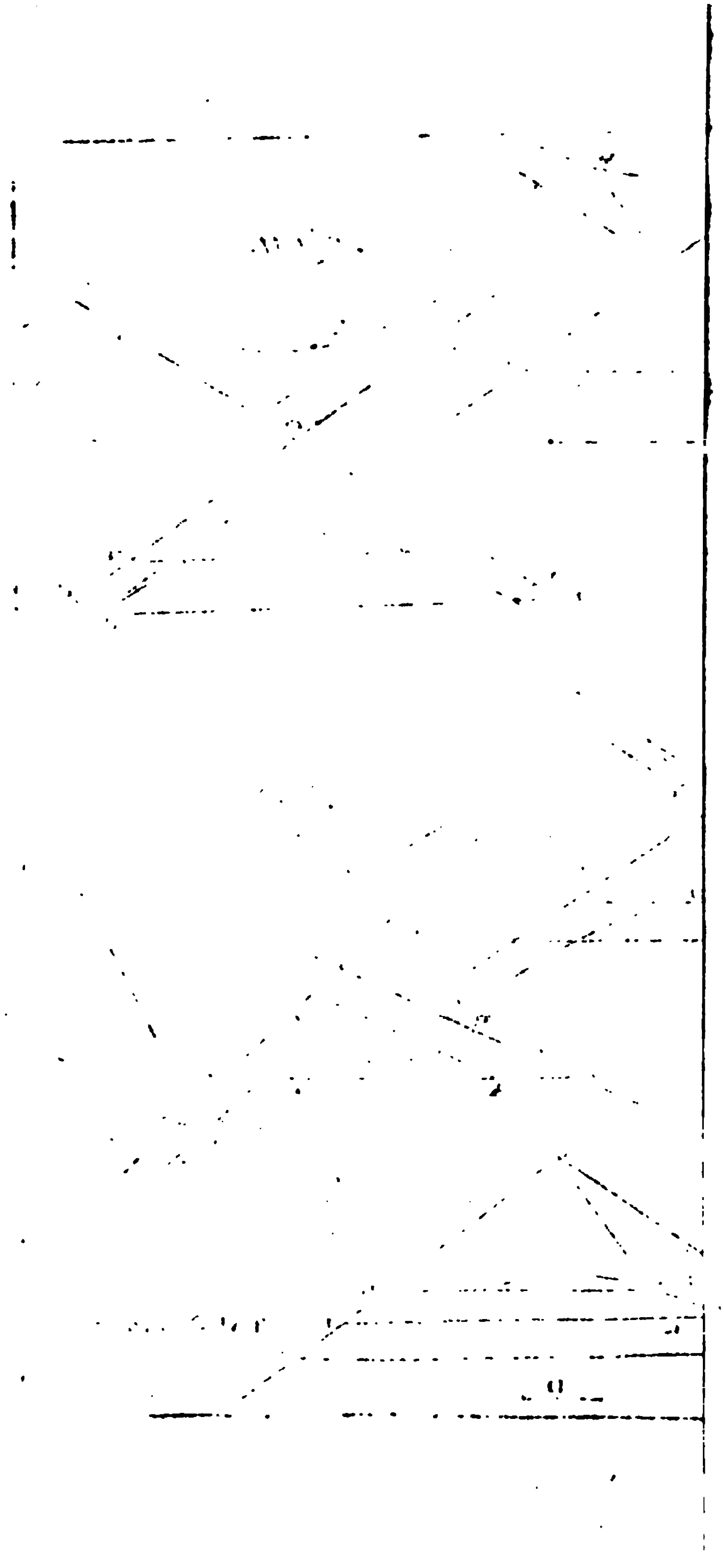
Per D ducatur DE aſymptoto AC parallela, & occurrens alteri in E; & in BC ſumatur quodvis aliud punctum G, & per ipſum ducatur GH ipſi DE parallela, quæ Hyperbolæ occurret in aliquo puncto F, (18. huj.): quoniam igitur æquales ſunt BD, DC, æquales erunt BE, EA; &, propter æquiangula triangula, eſt DE ad GH, ut EB ad BH; & igitur (per 1. 6.) eſt DEA rectangulum ad GHA, ut BEA ad BHA: ſed BEA majus eſt BHA, (5. 2.) ergo rectangulum DEA majus eſt rectangulo GHA, hoc eſt, propter Hyperbolam, rectangulum FHA majus eſt rectangulo GHA, & igitur eſt FH major HG; ergo punctum G eſt extra Hyperbolam, & propterea ipſam contingit BC in puncto D.

ALITER:

Fig. 15. n. 1. Si recta LM aſymptotis terminata bifariam ſecta fuerit Hyperbolâ in D, ipſam in eo puncto continget.

MAnifeſtum enim eſt rectam LD intra Hyperbolam non tranſire: ſi enim intra eam tranſiret, neceſſario ipſi rurſus occurreret in pun-


F
L
K



puncto aliquo N, quoniam scil. extra Hyperbolam cadit ad puncta L, M. Non autem occurrere potest Hyperbolæ in alio puncto præter D: Si enim fieri potest, occurrat in N; igitur est NM æqualis ipsi DL, (14. huj.) hoc est, ex hypothesi, ipsi DM: quod est absurdum. Non igitur cadit recta LM intra Hyperbolam, neque ipsi in alio puncto præter D occurrit, quare ipsam in eo puncto contingit.

Et contra: Si recta LM contingat Hyperbolam in D, segmentum ipsius inter asymptotos bifariam in puncto contactûs secabitur.

Si enim inæquales sint LD, DM, ex majore DM auferatur MN minori LD æqualis: punctum igitur N erit in Hyperbola, (19. huj.) ergo recta LM ipsam secat, contra hypothesin.

Cor. 1. Hinc, per idem Hyperbolæ punctum D non potest duci nisi unica contingens. Fig. 15. n. 1.

Sit punctum in Hyperbola D, & per ipsum ducatur ad asympton AB recta DE alteri parallela; & sumatur EB ipsi EA æqualis, junctaque BD occurrat alteri asymptoto in C: quoniam igitur æquales sunt BE, EA, æquales erunt BD, DC; & igitur BC contingit Hyperbolam in D. Nulla autem alia recta ipsam in D continget: Si enim fieri potest, contingat etiam LDM: quoniam igitur æquales sunt BE, EA, inæquales erunt LE, EA; & igitur inæquales erunt LD, DM: ergo LM non contingit Hyperbolam.

Cor. 2. Hinc manifestum est, quomodo datis positione asymptotis Hyperbolæ AB, AC, duci poterit recta linea BC, quæ ipsam in dato puncto D contingat.

Cor. 3. Si per vertices diametri transversæ ducantur duæ rectæ Hyperbolas contingentes, erunt hæ inter se parallelæ. Sint AC, BC asymptoti, & contingant AOB, QPR Hyperbolas in verticibus diametri transversæ OCP, erunt AB, QR inter se parallelæ: ductis enim ad alterutram asymptoton AC rectis OS, PT, alteri parallelis, erunt triangula SCO, TCP æquiangula; & propter æquales, per hanc Propositionem, AO, OB, æquales erunt AS, SC: & similiter æquales erunt QT, TC; & est CO ad CP, ut CS ad CT, ideoque ut CA ad CQ: ergo æquiangula sunt OCA, PCQ triangula, & proinde parallelæ erunt OA, PQ. Fig. 15. n. 2.

Cor. 4. Et, si ducatur recta parallela contingenti & Hyperbolæ occurrens, erit quadratum ex segmento contingentis inter tactum & asymptoton æquale rectangulo contento segmentis rectæ paralle-

 læ

læ inter Hyperbolam & asymptotos. Nam rectangulum hoc æquale est rectangulo contento segmentis contingentis inter tactum & asymptotos, (15. huj.) hoc est, quadrato ex segmento ejus inter tactum & alterutram asymptoton.

PROP. XXIV. PROBL.

FIG. 15. n. 1. Datis positione Hyperbolæ asymptotis AB, AC, punctoque in ipsa F, rectam ducere quæ contingat Hyperbolam, & parallela sit rectæ positione datæ KO; quæ utramque Hyperbolæ vel oppositæ Hyperbolæ asymptoton secat.

FActum puta; sitque BC parallela ipsi KO, & Hyperbolam in D contingat; & juncta AD, occurrat KO in P; & ipsi AD parallela ducatur FRQ, asymptotis occurrens in Q, R: & quoniam recta BC contingit Hyperbolam in D, erit BD æqualis DC, (23. huj.) quare & KP æqualis erit ipsi PO; & datur KO positione & magnitudine, ergo datur KP & punctum P, & datur A punctum; quare recta PAD positione datur. Est autem quadratum ex AD æquale rectangulo QFR, (Cor. 1. 15. huj.): & quoniam positione datur FRQ, quæ per datum punctum F parallela ducta est positione datæ AD, (28. Dat.) & positione dantur AB, AC; ideo dabuntur FQ, FR, (25. 26. Dat.): datum igitur est rectangulum QFR, quare quadratum ex AD datur, & ipsa AD magnitudine; sed & positione & punctum A; datum proinde est punctum D, (27. Dat.) ergo & BDC positione datur, (28. Dat.)

Componetur vero ita: Bifariam secetur KO in P, & junctæ AP parallela ducatur, per punctum F, recta FRQ asymptotis in R, Q occurrens; in ipsa vero AP producta ad utramvis partem ponatur AD, quæ media sit proportionalis inter ipsas FQ, FR; & per D ducatur BDC parallela ipsi KO; continget BC Hyperbolam in D. Nam quoniam quadratum ex AD æquale est rectangulo QFR, erit punctum D in Hyperbola, (Cor 1. 15. huj.); & quoniam parallelæ sunt KO, BC, sitque KO bifariam secta rectâ PAD in P, bifariam secabitur BC in D, ideoque Hyperbolam in D continget, (23. huj.)

PROP.

PROP. XXV.

Si Hyperbolam recta quævis contingat, abscindet ex asymptotis ad Hyperbolæ centrum rectas continentes rectangulum æquale ei quod continetur rectis ab altera qualibet contingente abscissis.

Sit Hyperbola, cujus asymptoti AB, AD, & ipsam contingat recta BD in C, eandem vero vel oppositam Hyperbolam contingat recta GE in F; erunt rectangula BAD, EAG inter se æqualia. Fig. 16.

Ducantur enim a punctis C, F rectæ CH, CK & FL, FM asymptotis parallelæ: quoniam igitur BCD Hyperbolam contingit, erit BC æqualis ipsi CD, (23. huj.); quare BA dupla erit ipsius AH, & AD ipsius HC; ergo rectangulum BAD quadruplum est rectanguli CHA. Eodem modo demonstrabitur rectangulum EAG rectanguli FMA quadruplum: sed rectangulum CHA æquale est rectangulo FMA, (16. huj.); rectangulum igitur BAD æquale est rectangulo EAG.

PROP. XXVI.

Si duæ rectæ Hyperbolam vel oppositas Hyperbolas contingentes asymptotis occurrant, quæ inter occursus ducuntur rectæ, sibi mutuo & contactûs conjungenti parallelæ erunt.

Sit Hyperbola, cujus asymptoti AB, AD, ipsamque contingat BD in C, & eandem vel oppositam Hyperbolam contingat EG in F; erunt junctæ BE, DG ipsi CF parallelæ. Fig. 16.

Jungatur DF, quæ occurrat BE in N; & quoniam æqualia sunt rectangula BAD, EAG, erit BA ad AE, ut GA ad AD; & igitur parallelæ sunt BE, GD, quare est DF ad FN, ut GF ad FE, hoc est, (23. huj.) ut DC ad CB: parallelæ igitur sunt BN, CF, (2. 6.)

Cor. Hinc sequitur segmenta duarum contingentium inter asymptotos proportionaliter dividi in puncto mutui occursûs & punctis contactuum.

P R O P. XXVII.

Omnis recta per centrum Hyperbolæ ducta, intra angulum qui deinceps est angulo Hyperbolam continenti, est diameter recta.

FIG. 15. n. 2. SIt Hyperbola, cujus asymptoti AC, BC, & ducatur quævis recta CE per centrum intra angulum ACD, qui est deinceps ipsi ACB; erit CE diameter recta.

Sumatur enim in BC producta quodvis punctum D, & per ipsum ducatur ad CE recta DF asymptoto CA parallela, & facta DG æquali DC, jungatur GF, quæ conveniat cum CA in H; & quoniam GH occurrit rectis CA, CD, qui continent angulum qui deinceps est angulo ACB, ipsa necessario cum Hyperbolis conveniet, (20. huj.): conveniat in K, L punctis; æquales igitur sunt KH, LG, (14. huj.): & propter æquales CD, DG, & parallelas CH, DF, æquales erunt HF, FG; quare totæ FK, FL sunt æquales, & CF est diameter recta, (Def. 4.)

D E F. XI.

REcta linea per centrum Hyperbolæ ducta, parallela rectæ contingenti, & segmento ipsius inter asymptotos æqualis, quæque bifariam in centro dividitur, vocatur *Diameter secunda* ejus quæ per punctum contactûs ducitur.

COR. 1. Hinc, omnis diameter secunda est diameter recta, quoniam sciz. cadit intra angulum, qui deinceps est angulo Hyperbolam continenti.

COR. 2. Hinc, recta quæ jungit vertices seu extremitates diametri transversæ & ipsius secundæ, parallela est asymptoto.

FIG. 15. n. 2. Sit enim OCP diameter transversa, & MCN secunda ipsi conjugata, & AOB recta Hyperbolam in vertice transversæ contingens; erunt MO, NO ipsis CB, CA parallelæ, (33. 1. & Def. 11. huj.)

DEF. XII.

Tertia proportionalis duabus diametris, quarum una est transversa, altera ipsius secunda, *Latus rectum* sive *Parameter* vocatur ejus diametri, quæ est prima trium proportionalium.

PROP. XXVIII.

Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum transversam recta parallela ipsius diametro secundæ, erit quadratum ex diametro transversâ ad quadratum ex diametro secundâ, ut rectangulum contentum segmentis diametri transversæ inter vertices ejus & parallelam ad quadratum ex parallela.

Sit A*a* diameter transversa, ipsiusque secunda sit B*b*, & asymptoti CF, CG; & a puncto Hyperbolæ D, ducatur ad transversam recta DE ipsi B*b* parallela: erit quadratum ex A*a* ad quadratum ex B*b*, ut rectangulum AE*a*, ad quadratum ex DE. Fig. 17.

Occurat DE asymptotis in F, G, & ducatur HAK Hyperbolam contingens in vertice A; igitur per Definit. XI. est HA æqualis & parallela ipsi BC, & igitur parallela ipsi FE; & propter æquiangula triangula est quadratum ex CE ad quadratum ex EF, ut quadratum ex CA ad quadratum ex AH, hoc est, ad rectangulum FDG (Cor. 4. 23. huj.) & igitur erit (19. 5.) quadratum ex CA ad quadratum ex AH, ut rectangulum AE*a* ad quadratum ex ED; ergo quadratum ex A*a* est ad quadratum ex B*b*, ut rectangulum AE*a* ad quadratum ex ED.

Cor. 1. Quadrata ex rectis, quæ a punctis Hyperbolæ vel oppositæ Hyperbolæ ducuntur ad diametrum transversam parallelæ ipsius secundæ, sunt inter se ut rectangula contenta segmentis transversæ inter vertices ejus & parallelas, ut in Ellipsi ostensum.

Cor. 2. Et contra, Si Hyperbolæ A sit A*a* diameter transversa, & B*b* diameter ipsius secunda; & a puncto D ducta sit ad transversam recta DE secundæ parallelæ, & occurrens transversæ productæ in E; fueritque quadratum ex CA ad quadratum ex CB, ut rectangulum AE*a* ad quadratum ex ED: erit punctum D in Hyperbola. Fig. 17.

Nam

Nam quoniam DE parallela est BC, & igitur contingenti HK per verticem transversæ; DE asymptotis & igitur Hyperbolæ necessario occurret; si igitur non occurrit ei in D, occurrat, si fieri potest, in alio puncto *d*, ad eas partes ipsius A*a* ad quas est D; erit igitur rectangulum AE*a* ad quadratum ex *d*E, ut quadratum ex CA ad quadratum ex CB, hoc est, ex hypothesi, ut AE*a* ad quadratum ex DE; æquales igitur sunt *d*E, DE, quod est absurdum. Non occurrit igitur recta per E Hyperbolæ in *d*, & similiter neque in quovis puncto præter D.

Cor. 3. Et Corollarium 3. Prop. 15. lib. 2. eodem modo quo ibi de Ellipsi, hic de Hyperbola ostendetur.

PROP. XXIX.

Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum secundam recta parallela ipsius diametro transversæ; erit quadratum ex diametro secundâ ad quadratum ex transversâ; ut summa quadratorum ex secunda & segmento ejus inter centrum & ductam ad quadratum ex ducta.

Fig. 17. A Puncto Hyperbolæ D ducta sit DL ad diametrum secundam B*b*, parallela transversæ A*a*; erit quadratum ex B*b* ad quadratum ex A*a*, ut quadrata ex CB, CL simul ad quadratum ex DL.

Per punctum D ducatur DE ipsi BC parallela; & quoniam per præcedentem est quadratum ex CA ad quadratum ex CB, ut rectangulum AE*a* ad quadratum ex ED; erit, invertendo & per 12. 5, quadratum ex CB ad quadratum ex CA, ut summa quadratorum ex CB, ED, ad quadratum ex CA & rectangulum AE*a* simul, hoc est, ut summa quadratorum ex CB, CL ad quadratum ex EC seu DL.

Cor. 1. Si a duobus punctis Hyperbolæ vel oppositarum Hyperbolarum ducantur ad diametrum secundam duæ rectæ diametro ipsius transversæ parallelæ; erit quadratum ex primo ductâ ad quadratum ex altera, ut summa quadratorum ex semidiametro secunda & distantia primo ductæ a centro ad summam quadratorum semidiametri secundæ & distantiæ alterius a centro.

Cor.

Cor. 2. Et contra; Si a puncto D ducta sit ad Hyperbolæ diametrum secundam BC, recta DL parallela ipsius transversæ CA; fueritque quadratum ex Bb ad quadratum ex Aa, ut summa quadratorum ex CB, CL, ad quadratum ex DL: erit punctum D in Hyperbola. Nam quoniam recta DL parallela est diametro transversæ AC quæ inter asymptotos cadit, ipsa DL necessario occurret rectis quæ comprehendunt angulum deinceps ei qui continet Hyperbolam; & igitur (20. huj.) utrique Hyperbolæ occurret; & similiter, ut in Cor. 1. præcedentis, ostendetur eam occurrere Hyperbolæ in D.

Cor. 3. Et Corollarium tertium præcedentis Prop. mutatis mutandis, hic obtinet.

PROP. XXX.

Recta quævis Hyperbolâ vel Hyperbolis utrinque terminata, & parallela diametro transversæ vel ipsius diametro secundæ, bifariam secatur ab altera; seu, quod idem est, diameter transversa & ipsius secunda sunt diametri conjugatæ.

Cor. Et manifestum est non posse duas diametros eidem seu transversæ seu secundæ conjugatas esse.

PROP. XXXI.

Recta quævis Hyperbolâ vel oppositis Hyperbolis terminata, & a diametro transversa vel ipsius secunda bifariam secta, parallela est alteri. Et igitur ordinatim applicatæ sunt inter se parallelæ.

Cor. 1. Et rectæ quæ parallelæ sunt alterutri diametro, transversæ sciz. aut ipsius secundæ, & abscindunt æqualia segmenta alterius, inter ipsas & centrum, æquales sunt inter se: Et si sint parallelæ alterutri diametro & æquales inter se, abscindent æqualia segmenta alterius inter ipsas & centrum.

Demonstrantur hæ duæ Propositiones & Corollarium 1. ex 28. & 29. iisdem verbis quibus Propositiones 9. & 10. ex 7. & 8. Fig. 17. n. 2.

Cor.

Cor. 2. Et, si duæ vel plures rectæ parallelæ Hyperbolâ vel Hyperbolis terminentur, diameter quæ unam ex ipsis bifariam secat, bifariam secabit & reliquas; nam quæ bifariam secta est parallela erit diametro conjugatæ ei quæ rectam bifariam secat; ergo reliquæ rectæ parallelæ erunt eidem conjugatæ; & igitur bifariam ab altera diametro secabuntur (30. huj.)

Cor. 3. Contra; Recta quæ duas parallelas rectas Hyperbolâ vel Hyperbolis terminatas bifariam secat, est diameter; nam si non, ducatur diameter unam ex parallelis bifariam secans, bifariam secabit hæc alteram, & utraque bisecta est ex Hypothesi aliâ rectâ, quod est absurdum.

PROP. XXXII.

Recta ducta per verticem diametri transversæ parallela ordinatim ipsi applicatæ, Hyperbolam contingit; & si contingat, parallela erit ordinatim applicatis.

Fig. 17. Sit Hyperbola, cujus asymptoti CF, CG, diameter transversa Aa, sitque per verticem ejus A ducta recta HAK parallela ordinatim applicatæ DM; continget HK Hyperbolam.

Nam ordinatim applicata parallela est diametro secundæ conjugatæ ei cui applicatur (31. huj.) & igitur recta per verticem eidem conjugatæ parallela est; quare ipsa Hyperbolam contingit (Def. XI.) Et contra, si HK Hyperbolam contingat, parallela erit diametro secundæ ipsius CA, (Def. XI.) ordinatim autem applicata DM eidem est parallela (31. huj.) & igitur HK, DM sunt inter se parallelæ.

Cor. Hinc, duæ rectæ Hyperbolâ vel Hyperbolis terminatæ, & non per centrum transeuntes, bifariam se mutuo non secabunt. Nam si utraque recta eâdem Hyperbola terminetur, ducatur contingens per verticem diametri quæ per occursum rectarum transit; & per hanc propositionem utraque recta parallela erit rectæ contingenti, ideoque inter se parallelæ erunt, *Q. E. A.* Sin vero una recta Hyperbolâ terminetur, & altera inter oppositas Hyperbolas ducta sit, liquet ipsas se mutuo bifariam non posse secare.

PROP.

PROP. XXXIII.

Si recta linea Hyperbolam contingens diametro occurrat, & a tactu ad diametrum ducatur ordinatim applicata; erit semidiameter media proportionalis inter segmenta ipsius quæ ab ordinatim applicata & contingente abscinduntur, inter ipsas sciz. & centrum.

Cas. 1. QUando contingens occurrit diametro transversæ.

Sit Hyperbola, cujus asymptoti AG, AH, & per Fig. 18. punctum ipsius C ducatur contingens KCH occurrens diametro transversæ BAO in E, per contactum vero C ducatur ad eandem diametrum ordinatim ipsi applicata CD: erunt AE, AB, AD proportionales.

Per verticem B ducatur contingens GBF, quæ contingenti per C occurrat in N, sitque BM parallela ipsi HC, occurrens AG in M; occurratque DC ipsi AH in L. Quoniam igitur est DC ordinatim applicata diametro transversæ AB, & est GF contingens per ipsius verticem, parallelæ erunt DC, GF (32. huj.) Et quoniam contingentes HK, GF proportionaliter dividuntur in punctis C, B, N (Cor. 26. huj.) erit CN ad NH, ut BN ad NG; igitur propter parallelas est LF ad FH, ut MK ad KG; quoniam vero parallelæ sunt KF, GH (26. huj.) erit FH ad FA, ut KG ad KA, quare ex æquo est LF ad FA, ut MK ad KA; & componendo, est LA ad FA, ut MA ad KA; ergo propter parallelas est DA ad BA, ut BA ad EA.

Cas. 2. Quando contingens occurrit diametro secundæ.

Contingat Hyperbolam recta CE, occurratque diametro secundæ Fig. 19. AB in E, ipsi vero KAF, quæ diametro AB conjugata est, occurrat in G; & a tactu C ducantur ad diametros ordinatim applicatæ CD, CH; erunt AD, AB, AE proportionales.

Nam per præcedentem casum proportionales sunt AH, AF, AG, igitur est quadratum ex AH ad quadratum ex AF, ut AH ad AG (Cor. 20. 6.) & dividendo, est rectangulum KHF ad quadratum ex AF, ut HG ad GA; est autem, propter CH ordinatim applicatam ipsi AF, rectangulum KHF ad quadratum ex AF, ut quadratum ex CH seu AD ad quadratum ex AB; quare est quadratum

ex AD ad quadratum ex AB, ut (HG ad GA, hoc est, ut) CH seu AD ad AE; ergo proportionales sunt AD, AB, AE. (Conversi. Cor. 20. 6.)

FIG. 18. COR. 1. Quoniam proportionales sunt AD, AB, AE, (erit in casu quo contingens & ordinatim applicata occurrunt diametro transversæ BAO) DO ad DB, ut EO ad EB, hoc est, segmenta diametri inter ordinatam & ipsius vertices sunt inter se ut segmenta ejusdem inter contingentem & eosdem vertices, ut in 2. parte Prop. 17. lib.
FIG. 19. 2. ostensum fuit.

COR. 2. In secundo casu propositionis, quando ordinatim applicata a contactu ducta transit per extremitatem diametri secundæ, contingens transibit per alteram ejusdem extremitatem. Nam quoniam distantia ordinatim applicatæ a centro æqualis est semidiametro transversæ, distantia contingentis ab eodem eidem semidiametro æqualis erit.

PROP. XXXIV.

Si a puncto Hyperbolæ C ducatur ad diametrum AB ordinatim applicata CD, & recta CE, fueritque semidiameter media proportionalis inter segmenta diametri abscissa a ductis, centroque adjacentia; continget recta CE Hyperbolam.

FIG. 18, 19. SI enim CE non contingat Hyperbolam, contingat eam CP; ergo per præcedentem proportionales erunt AD, AB, AP; & ex hypothesi proportionales sunt AD, AB, AE; quod est absurdum: quare Hyperbolam contingit CE.

PROP. XXXV.

Si recta linea Hyperbolam contingens diametro transversæ occurrat, & a tactu ad diametrum ducatur ordinatim applicata; erit rectangulum contentum segmentis diametri inter ordinatam & centrum, & inter eandem & contingentem, æquale rectangulo contento segmentis inter ordinatam & vertices diametri: rectangulum ve-

vero contentum segmentis inter contingentem & centrum, & inter eandem & ordinatam, æquale erit contento segmentis inter contingentem & vertices diametri. Si vero contingens occurrat diametro secundæ, & a tactu ad diametrum ducatur ordinatim applicata; erit rectangulum contentum segmentis inter ordinatam & centrum, & inter eandem & contingentem, æquale quadratis ex semidiametro & segmento inter ordinatim applicatam & centrum: rectangulum vero contentum segmentis inter contingentem & centrum, & inter eandem & ordinatam, æquale erit quadratis ex semidiametro & segmento inter contingentem & centrum.

Cas. 1. Occurrat recta contingens Hyperbolam in puncto C diametro transversæ BAO in E, ordinatim vero applicata eidem diametro ipsi occurrat in D; erit rectangulum ADE æquale rectangulo BDO. Fig. 18.

Nam quoniam proportionales sunt AD, AB, AE, erit rectangulum DAE æquale quadrato ex AB; &, ablatis æqualibus hisce a quadrato ex AD, erit reliquum rectangulum ADE æquale reliquo BDO. Si vero ex æqualibus, rectangulo sciz. DAE & quadrato ex AB, auferatur commune quadratum ex AE; erit reliquum rectangulum AED æquale reliquo BEO.

Cas. 2. Occurrant jam contingens & ordinata, a puncto C ductæ, diametro secundæ in E, D; & quoniam rectangulum EAD æquale est quadrato ex AB, addatur utrique quadratum ex AD, & erit rectangulum ADE æquale quadratis ex AB, AD. Si vero æqualibus rectangulo sciz. EAD & quadrato ex AB, addatur quadratum ex AE; erit rectangulum AED æquale quadratis ex AB, AE. Fig. 19.

PROP. XXXVI.

Si recta linea Hyperbolam contingat, bifariam secabit angulum contentum rectis a focis ad contactum ductis; & contra.

Sit Hyperbola, cujus axis transversus AB, & centrum C, ipsam vero contingat recta DE axi occurrens in E, & a tactu D ducan- Fig. 20.

tur ad focos rectæ DF, DG; erunt anguli FDE, GDE inter se æquales.

A puncto D ducatur ad axem recta DH ipsi perpendicularis, & a vertice A puncto D propiore ponatur in axe producto recta AK ipsi DF æqualis, & erit KB æqualis ipsi DG (1. huj.); & per Propositionem 5. huj. est CK ad CH, ut CF ad CA, ut vero CH ad CA, ita est CA ad CE (33. huj.); quare ex æquo est CK ad CA, ut CF ad CE; & convertendo, est CK ad KA, ut CF ad FE, & duplicando antecedentes, est CK bis ad KA, ut FG ad FE; igitur dividendo, est BK ad KA, ut GE ad FE; & æquales sunt BK, KA ipsis DG, DF; ergo est DG ad DF, ut GE ad EF, igitur recta DE bifariam secat angulum FDG (3. 6.).

Et contra: Si recta DE bifariam secet angulum FDG, continget ipsa Hyperbolam. Nam si non, ipsam in puncto D contingat alia recta, bifariam secabit hæc angulum FDG, & eundem bifariam secat DE: quod est absurdum.

PROP. XXXVII. PROBL.

Fig. 21. Datis positione duabus rectis AB, CD se mutuo bifariam & ad angulos rectos secantibus in E; Hyperbolas oppositas describere, quarum ipsæ sint axes, ita sciz. ut alterutra AB sit transversus.

Jungatur AC, & a puncto E ponantur super AB rectæ EF, EG æqualis utraque rectæ AC; tum ope fili, & regulæ quæ longitudine filum superet differentiâ quæ ipsi AB sit æqualis, describantur focis F, G Hyperbolæ oppositæ, ut in Definitione prima; transibunt hæ per puncta A, B, eritque CD ipsarum axis secundus.

Si enim Hyperbola non transit per A, transeat, si fieri potest, per punctum H; igitur excessus ipsarum HG, HF æqualis erit excessui longitudinis regulæ supra eam fili, hoc est, ex constructione, rectæ AB; sed propter æquales BG, AF, excessus AG supra AF æqualis est eidem AB; quod est absurdum: ergo transit Hyperbola per A, & similiter ostendetur eam transire per B. Præterea, erunt C, D termini axis secundi; si enim C non sit ejusdem terminus, sit K, ad easdem sciz. partes centri ad quas est C; igitur juncta KA æqua-

lis

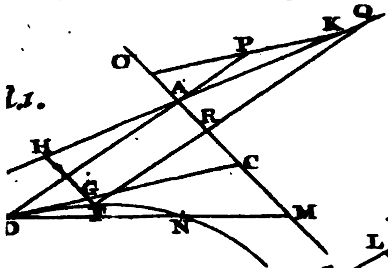
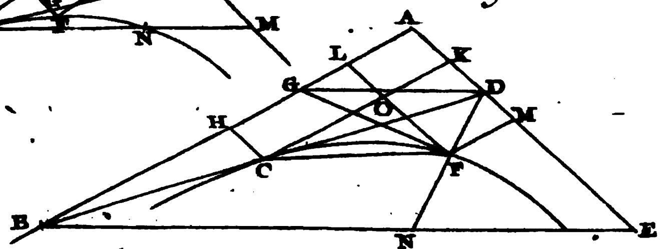


Fig.16.



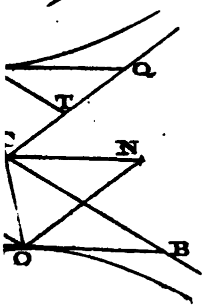
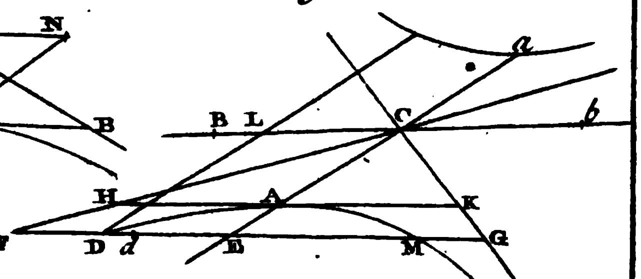


Fig.17.N.1.



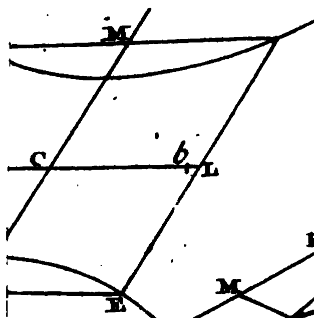
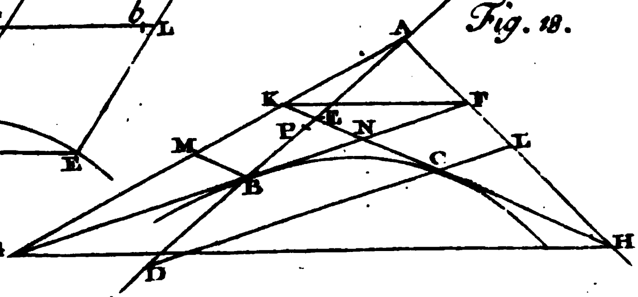


Fig.18.



lis erit ipsi EF (Def. 6. huj.) & ex constructione est CA æqualis eidem EF; æquales igitur sunt KA, CA: quod est absurdum.

DEF. XIII.

SI super duas rectas Aa, Bb, se mutuo bifariam & ad angulos rectos secantibus, describantur Hyperbolæ oppositæ AG, ag; & super easdem rectas describantur aliæ duæ Hyperbolæ oppositæ BK, bk, quarum axis transversus Bb sit axis secundus priorum; & axis secundus sit priorum transversus, dicuntur hæ quatuor Hyperbolæ *Conjugatæ*. Fig. 22.

PROP. XXXVIII.

Hyperbolæ conjugatæ habent asymptotos communes.

SInt Hyperbolæ conjugatæ quarum axes Aa, Bb, sintque CD, CE asymptoti Hyperbolarum oppositarum quarum axis transversus est Aa; erunt eædem rectæ asymptoti Hyperbolarum quarum axis transversus est Bb. Fig. 22.

Per verticem A ducatur DAE ipsi BC parallela, & jungatur DB, & producatur ad F: igitur, per Def. 10. est BC æqualis & parallela ipsi AD, seu AE; quare est BD æqualis & parallela ipsi CA: & propter triangula FBC, CAE æquiangula & æqualia, est BF æqualis ipsi CA; ergo, per Def. 10. CD, CF sunt asymptoti Hyperbolæ, cujus axis transversus est Bb, & secundus Aa.

PROP. XXXIX.

Si a puncto G in una Hyperbolarum conjugatarum ducatur GH parallela asymptoto EC, & alteri occurrens in H; a puncto vero K in Hyperbola adjacenti ducatur KL parallela alterutri asymptoto, alteri occurrens in L: erunt rectangula GHC, KLC, contenta sciz. ductis & abscissis inter ipsas & centrum, sibi invicem æqualia. Et contra: Si fuerit punctum G in una Hyperbolarum, & punctum K in angulo comprehenso asymptotis Hyper-

Hyperbolæ adjacentis, fueritque rectangulum KLC æquale rectangulo GHC; erit punctum K in Hyperbola adjacenti.

FIG. 22. Sint Aa, Bb axes Hyperbolarum conjugatarum, & jungatur AB asymptoto CD, occurrens in M; & ducatur AD parallela ipsi CB: quoniam igitur parallelæ & æquales sunt BC, AD, erunt triangula CBM, ADM similia & æqualia; & igitur æquales sunt AM, MB, quare & rectangula AMC, BMC sunt æqualia; & parallela est AB ipsi EC (Cor. 2. Def. 10.) ergo GHC, KLC rectangula ipsis AMC, BMC, & igitur sibi invicem æqualia erunt, (Cor. 1. Prop. 16. huj.)

Et contra: Si fuerit G in Hyperbola, & punctum K intra angulum DCF, fueritque KLC rectangulum æquale rectangulo GHC, cæteris manentibus; erit K in Hyperbola adjacenti. Nam quoniam rectangulum KLC æquale est ipsi GHC, hoc est, ipsi AMC, hoc est, rectangulo BMC, & est B in Hyperbola adjacenti, erit punctum K in eadem, (Cor. 3. 18. huj.)

PROP. XL. *Quæ XX. est lib. 2. Apollonii.*

Si unam Hyperbolarum conjugatarum recta linea contingat, & per ipsarum centrum ducantur duæ rectæ, una quidem per contactum, altera vero contingenti parallela, quousque occurrat uni Hyperbolarum adjacentium; erit hæc semidiameter secunda conjugata transversæ quæ per tactum ducta est. Et contra: Si ducatur semidiameter secunda conjugata ei quæ per tactum ducitur, erit terminus ejus in Hyperbola adjacenti.

FIG. 23. Sint Hyperbolæ conjugatæ, quarum asymptoti CG, CF; & unam Hyperbolarum contingat recta MF in D; jungatur vero CD, & ducatur ipsi MF parallela recta CE, Hyperbolæ, adjacenti ei in qua est punctum D, occurrens in E: erit CE semidiameter secunda conjugata ipsi CD.

Per puncta D, E ducantur rectæ DH, EK parallelæ asymptoto CG, & alteri occurrentes in H, K: quoniam igitur recta MF contingit

tingit Hyperbolam in D, æquales erunt MD, DF, & igitur æquales sunt CH, HF; quare rectangulum DHF æquale est (rectangulo DHC, hoc est) rectangulo EKC, (per præced.): & propter æquiangula triangula EKC, DHF, est EK ad DH, ut KC ad HF; & igitur, per 22. 6. est quadratum ex EK ad quadratum ex DH, ut rectangulum EKC ad rectangulum DHF; æqualia autem sunt rectangula EKC, DHF, ut ostensum fuit; ergo æqualia sunt quadrata ex EK, DH; quare & rectæ EK, DH sunt æquales, & igitur æquales sunt EC, DF, & sunt parallelæ; ergo CE est semidiameter secunda conjugata ipsi CD, (Def. 11. huj.)

Et contra: Si CE sit semidiameter secunda ipsi CD conjugata, cæteris manentibus, erit ipsius terminus E in Hyperbola adjacenti ei in qua est punctum D. Nam erit CE æqualis & parallela ipsi DF, (Def. 11.) & est EK parallela ipsi DH; & igitur æqualia sunt triangula EKC, DHF, (26. 1.); quare æqualis est KC ipsi HF, seu HC, & EK ipsi DH, & propterea rectangulum EKC æquale est rectangulo DHC, & est punctum D in Hyperbola, & punctum E in angulo deinceps ei qui Hyperbolam hanc continet; ergo punctum E est in Hyperbola ipsi adjacenti, (per præced. partem 2.) Fig. 23.

Cor. 1. Si sit CD semidiameter transversa, & CE secunda ipsi conjugata in Hyperbola AD; erit, vice versâ, CE transversa, & CD secunda ipsi conjugata in Hyperbola adjacenti BE.

Jungatur ME, quæ occurrat alteri asymptoto in P: & quoniam in secunda parte hujus Propositionis ostensum fuit æquales esse EK, DH, quæ inter se parallelæ sunt ex constructione, parallela erit DE ipsi PF, & est MF bifariam secta in D; quare MP bifariam secabitur in E: & est E in Hyperbola adjacenti, ergo MP ipsam in E continget: & est CD parallela & æqualis ipsi ME, quoniam æquales & parallelæ sunt CE, MD; ergo est CD secunda diameter conjugata transversæ CE in Hyperbola BE, (Def. 11.)

Cor. 2. Iisdem manentibus, erit concursus contingentium DM, EM, quæ per vertices scil. diametrorum conjugatarum ducuntur, ad unam asymptoton, seu recta per centrum C & concursum M contingentium est asymptotos. Nam si CM non sit asymptotos, sit ea CQ occurrens DM in Q; erit igitur CE æqualis DQ, (Def. 11.) sed eadem CE æqualis est DM, quoniam parallelogrammum est DMEC, æquales igitur sunt DQ, DM; quod est absurdum. Fig. 23.

Cor.

Cor. 3. Si recta DE intercepta inter Hyperbolam & unam ex Hyperbolis adjacentibus, bifariam secta fuerit asymptoto; parallela erit alteri asymptoto. Occurrat enim DE asymptoto in L; & quoniam æquales sunt DL, LE, & parallelæ sunt EK, LC, DH, æquales erunt HC, CK; & æqualia sunt rectangula DHC, EKC, (38. huj.) ergo æquales sunt DH, EK, & sunt parallelæ, quare est DE parallela ipsi KH. Manifestum quoque est, si DE fuerit parallela ipsi KH, æquales fore DL, LE: nam erit DEKH parallelogrammum, & igitur æquales sunt EK, DH; & propter æqualia rectangula EKC, DHC, æquales erunt KC, CH, ergo & EL, LD. Denique, si fuerit DE parallela asymptoto HK, & æquales sint DL, LE, punctumque D sit in Hyperbola; erit E in Hyperbola adjacenti: nam propter æquales DL, LE, æquales erunt HC, CK; & æquales sunt DH, EK, igitur æqualia sunt rectangula DHC, EKC, & erit E in Hyperbola BE, (38. huj.)

PROP. XLI.

Si a termino diametri secundæ Hyperbolæ ducatur recta parallela diametro cuilibet transversæ, occurratque diametro secundæ huic conjugatæ; erit quadratum ex ducta, ad rectangulum contentum segmentis diametri cui occurrit, inter ipsius vertices & ductam; ut quadratum ex diametro ductæ parallela, ad quadratum ex diametro secunda huic conjugata. Si vero ab eodem termino diametri secundæ ducatur recta parallela diametro cuilibet secundæ, occurratque diametro transversæ huic conjugatæ; erit quadratum ex ducta, ad quadratum ex semidiametro cui occurrit, unà cum quadrato segmenti ejusdem inter centrum & ductam, ut quadratum diametri secundæ quæ ductæ est parallela, ad quadratum ex diametro huic conjugatæ.

Fig. 24. PRimo, Sit Hyperbola, cujus diameter transversa DC*d*, & secunda ipsi conjugata KC*k*; sitque CB quævis alia diameter secunda, & ab ipsius termino B ducatur recta parallela transversæ CD,

occur-

occurratque secundæ huic conjugatæ in L: erit quadratum ex BL ad rectangulum KL*k*, ut quadratum ex D*d* ad quadratum ex K*k*.

Nam erunt termini seu vertices diametrorum secundarum, sciz. B, K, *k*, in Hyperbolis adjacentibus, quarum diameter transversa K*k* erit secundæ D*d* conjugata, (Cor. 1. 40. huj.) ergo est quadratum ex BL ad rectangulum KL*k*, ut quadratum ex D*d* ad quadratum ex K*k*, (28. huj.)

Secundo, Casus secundus eodem prorsus modo demonstratur ex Prop. 29.

Cor. Hinc, si a quovis puncto A Hyperbolæ AD ducatur AM ordinatim applicata diametro rectæ K*k*, & a termino B diametri cujuscunque secundæ CB ducatur ad eandem K*k* recta BL ipsi AM parallela; erit quadratum ex BL ad quadratum ex AM, ut rectangulum KL*k* ad summam quadratorum ex semidiametro KC & segmento CM inter centrum & ordinatim applicatam. Constat ex hac Propositione & 29. hujus.

Si vero a puncto quovis A Hyperbolæ AD ducatur AE ordinatim applicata diametro transversæ D*d*, & a termino B diametri secundæ ducatur ad eandem D*d* recta BF ipsi AE parallela; erit quadratum ex BF ad quadratum ex AE, ut summa quadratorum ex semidiametro CD & segmento CF inter centrum & eam quæ a termino secundæ diametri ducta est, ad rectangulum DE*d*. Constat ex hac Propositione & 28. hujus.

PROP. XLII.

Si a termino B secundæ diametri CB ducatur BF ordinatim applicata diametro cuivis D*d*, & BH parallela diametro CA quæ ipsi CB conjugata est, diametro D*d* occurrens in H; erit semidiameter CD media proportionalis inter ipsas CF, CH. Fig. 24.

NAm terminus B secundæ diametri est in Hyperbola adjacenti, & est CA secunda diameter ejusdem Hyperbolæ, (Cor. 1. 40. huj.) quare BH eandem contingit, (Def. 11.) ergo proportionales sunt CF, CD, CH, (33. huj.)

Cor. Tenet etiam Propositio 35. huic casui accommodata.

M PROP.

PROP. XLIII.

Si a terminis diametrorum conjugatarum Hyperbolæ ducantur, ad tertiam quamlibet diametrum ordinatim ipsi applicatæ, erit quadratum ex segmento tertiæ diametri inter ductam a termino diametri transversæ & centrum, æquale quadrato ex segmento ejusdem tertiæ diametri inter alteram ductam & centrum, simul cum quadrato ex semidiametro ad quam ducuntur: quadratum vero ex segmento tertiæ diametri, inter ductam a termino diametri secundæ & centrum, æquale erit rectangulo contento segmentis tertiæ inter ordinatam ductam a termino diametri transversæ & vertices diametri tertiæ.

Fig. 24. Sint Hyperbolæ oppositæ, quarum CA semidiameter transversa, & CB secunda ipsi conjugata, sitque D*d* quævis alia diameter; & a terminis A, B ducantur ad D*d* ordinatim applicatæ AE, BF: erit quadratum ex EC æquale quadratis ex FC, CD; quadratum vero ex FC æquale erit rectangulo DE*d*.

Ad diametrum D*d* ducatur AG ipsi BC, & BH ipsi AC parallela; igitur, propter parallelas æquiangula erunt triangula CAG, HBC; & quoniam parallelæ etiam sunt AE, BF, (31. huj.) erunt etiam CAE, HBF æquiangula; igitur est CE ad HF, ut CA ad BH, hoc est, ut CG ad GH: quoniam vero est CD media proportionalis, tum inter CE, CG, tum inter CF, GH, (33 & 42. huj.) erit CF ad CE, ut CG ad CH; & igitur est CF ad CE, ut CE ad HF, & quadratum ex CE æquale erit rectangulo CFH; rectangulum vero CFH æquale est quadratis ex CF, CD, (Cor. 42. huj.) ergo quadratum ex CE iisdem ex CF, CD quadratis est æquale; &, dempto utrinque quadrato ex CD, erit reliquum rectangulum, sciz. DE*d*, reliquo quadrato ex CF æquale.

Fig. 24. Cor. Hinc, semidiameter CD, ad quam ordinatæ ducuntur, est ad semidiametrum conjugatam CK, ut distantia alterius ordinatæ a centro ad reliquam ordinatam. Nam quadratum ex CD est ad quadratum ex CK, ut rectangulum DE*d* ad quadratum ex EA, hoc

est,

est, per hanc Propositionem, ut quadratum ex CF ad quadratum ex EA; & igitur est CD ad CK, ut CF ad EA. Rursus, quoniam quadratum ex CD est ad quadratum ex CK, ut quadrata ex CF, CD simul ad quadratum ex BF, (41 huj.) hoc est, per hanc Propositionem, ut quadratum ex CE ad quadratum ex BF; erit CD ad CK, ut CE ad BF.

PROP. XLIV.

Excessus quadratorum ex semidiametris quibusvis conjugatis æqualis est excessui quadratorum ex semiaxibus, sciz. si inæquales fuerint: si autem diameter aliqua æqualis fuerit diametro ipsi conjugatæ, erit quævis alia diameter æqualis diametro sibi conjugatæ, angulusque asymptotis contentus erit in hoc casu rectus.

Sint enim CA, CB semidiametri conjugatæ, & CD, CK semiaxes; & a punctis A, B ducantur ad axes rectæ AE, AM, & BF, BL ipsis ordinatim applicatæ. Est igitur excessus quadratorum ex CA, CB æqualis excessui quo summa quadratorum ex CE, EA differt a summa quadratorum ex CL, LB: per præcedentem vero Propositionem quadratum ex CE æquale est quadratis ex CF, CD, &, per eandem, quadratum ex CL æquale est quadratis ex CM, CK; quare excessus quadratorum ex CA, CB æqualis est excessui quo tria quadrata ex CF, CD, EA simul differunt a tribus quadratis ex CM, CK, LB: & æqualia sunt quadrata ex CF, LB, ut & quadrata ex EA, CM; quare, demptis hisce æqualibus, erit excessus quo tria differunt a tribus quadratis æqualis excessui quo quadratum ex CD differt a quadrato ex CK, & igitur huic excessui æqualis est excessus quadratorum ex CA, CB. Fig. 24.

Prima pars aliter: Sint AB, AC semidiametri quævis transversæ in Hyperbola cujus asymptoti sunt AD, AE, & ducantur rectæ BD, CE ipsam in punctis B, C contingentes, & asymptotis in D, E occurrentes; igitur, per Def. 11. est BD æqualis semidiametro secundæ ipsi AB conjugatæ, & CE similiter æqualis diametro secundæ ipsi AC conjugatæ; & ostendendum est excessum quadratorum ex AB, BD æqualem esse excessui quadratorum ex AC, CE. Fig. 25.

 Per

Per puncta B, C ducantur BF, CH parallelæ asymptotis, & BG, CK iisdem perpendiculares: igitur æqualia sunt rectangula AFB, AHC, (Cor. 1. 16. huj.) quare est AF ad AH, ut HC ad FB, hoc est, propter æquiangula triangula, ut HK ad FG; & igitur æqualia sunt rectangula AFG, AHK, & ipsorum quadrupla æqualia erunt: quoniam vero per contactum B ducta est BF asymptoto parallela, æquales erunt rectæ DF, FA; quare est DG æqualis ipsis AF, FG simul: & propterea (8. 2.) rectangulum AFG quater æquale est excessui quadratorum ex DG, GA, hoc est, propter triangula rectangula DGB, AGB, excessui quadratorum ex DB, BA. Similiter ostendetur rectangulum AHK quater æquale excessui quadratorum ex EC, CA; & ostensum fuit rectangulum AFG quater æquale esse rectangulo AHK quater: ergo excessus quadratorum ex DB, BA æqualis est excessui quadratorum ex EC, CA.

Si vero in Hyperbola quævis diameter transversa AB æqualis fuerit secundæ, ipsi conjugatæ BD, erit quævis alia transversa diametro sibi conjugatæ æqualis, & rectus erit angulus asymptotis contentus. Nam quoniam æquales sunt DB, BA, ut & DF, FA, & communis BF, in triangulis DBF, ABF erit angulus BFD, & igitur EAD rectus. Et quoniam est EAD rectus, erit etiam angulus CHE rectus, & æquales sunt EH, HA, & communis CH; ergo æquales sunt EC, CA.

PROP. XLV.

SI per vertices diametrorum conjugatarum ducantur quatuor rectæ Hyperbolas conjugatas contingentes, parallelogrammum ipsis contentum æquale erit parallelogrammo contento contingentibus ductis per vertices aliarum quarumcunque conjugatarum.

Fig. 26. SInt AB, CD diametri conjugatæ, & per ipsarum vertices ducantur contingentes sibi mutuo occurrentes in K, L, M, N; sint vero EF, GH aliæ diametri conjugatæ, & per vertices ducantur contingentes sibi mutuo occurrentes in O, P, Q, R: erunt figuræ KLMN, OPQR parallelogramma, & inter se æquales.

Sit centrum Hyperbolæ S; & quoniam parallelæ inter se sunt KN, LM, ut & KL, MN, (Cor. 3. 23. huj.) erit KLMN parallelogrammum.

logrammum. Similiter est OPQR parallelogrammum; & quoniam AK, CK contingunt Hyperbolas in verticibus diametrorum conjugatarum, erit concursus ipsarum K ad asymptoton (Cor. 2. 40. huj.) Similiter ostendetur reliquos parallelogrammorum angulos ad asymptotos esse, quare asymptoti ipsorum sunt diagonales; & igitur parallelogrammum KLMN quadruplum est trianguli KSN, & OPQR trianguli OSR: æqualia autem sunt triangula KSN, OSR, quoniam sciz. rectangula KS in SN, OS in SR sunt æqualia, (25. huj. & 15. 6.) quare & parallelogramma KLMN, OPQR sunt æqualia. Hoc etiam demonstrari potest prout idem de Ellipsi, Prop. 20. lib. 2.

PROP. XLVI.

Si Hyperbolæ duæ diametri conjugatæ contingenti occurrant, erit rectangulum contentum segmentis contingentis inter contactum & diametros æquale quadrato ex semidiametro conjugata ei quæ per contactum transit.

SInt ACB, DCE duæ diametri conjugatæ, ipsisque occurrat recta Hyperbolam in F contingens, in punctis G, H; sitque CK semidiameter conjugata ipsi CF: erit rectangulum GFH æquale quadrato ex CK. Fig. 27.

A punctis F, K ducantur ad AB rectæ FM, KL ipsi DE parallelæ; & propter parallelas erit GM ad MC, ut GF ad FH, similia proinde sunt GMC, GFH rectangula; & quoniam æquiangula sunt triangula GMF, CLK, est GM ad GF, ut CL ad CK; igitur quoniam a quatuor proportionalibus rectis GM, GF, CL, CK describuntur quatuor figuræ similes similiterque positæ sciz. rectangula GMC, GFH, & quadrata ex CL, CK, erunt ipsæ proportionales; est vero rectangulum GMC æquale rectangulo AMB (35. huj.) hoc est quadrato ex CL (43. huj.); ergo rectangulum GFH æquale est quadrato ex CK.

PROP. XLVII.

Si a puncto Hyperbolæ ducatur ad diametrum transversam ordinatim ipsi applicata; erit rectangulum contentum segmentis diametri inter ordinatam & vertices ejus, ad

qua-

quadratum ex segmento ordinatim applicatæ inter Hyperbolam & diametrum; ut diameter, ad ipsius latus rectum: Si vero ducatur ordinatim applicata ad diametrum secundam; erunt quadrata ex semidiametro secundâ & segmento ipsius inter ipsi applicatam & centrum simul, ad quadratum ex ordinatim applicata; ut diameter secunda, ad ipsius latus rectum.

Fig. 28. Sit AB diameter transversa, & DE secunda ipsi conjugata, sitque AH latus rectum ipsius AB, & a puncto in Hyperbola F ducatur ad AB recta FG ipsi ordinatim applicata; erit rectangulum AGB ad quadratum ex FG, ut AB ad AH. Si vero ducatur FK ipsi DE ordinatim applicata; erunt quadrata ex CD, CK simul, ad quadratum ex FK; ut DE, ad ipsius latus rectum L.

Cas. 1. Nam quoniam proportionales sunt AB, DE, AH (Def. 12.) erit AB ad AH, ut quadratum ex AB ad quadratum ex DE, hoc est, ut rectangulum AGB ad quadratum ex FG.

Cas. 2. Quoniam proportionales sunt DE, AB, L, erit DE ad L, ut quadratum ex DE ad quadratum ex AB, hoc est, ut quadrata ex CD, CK simul ad quadratum ex KF.

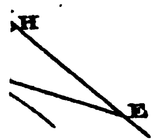
PROP. XLVIII.

Fig. 28. Si a puncto Hyperbolæ F ducatur ad diametrum transversam AB recta FG ipsi ordinatim applicata, & a vertice diametri ducatur AH ad ipsam perpendicularis, ipsique lateri recto æqualis; erit quadratum ex ordinatim applicata æquale rectangulo lateri recto adjacenti latitudinem habens abscissam inter applicatam & verticem, quodque excedit figurâ simili & similiter positâ ei quæ continetur diametro & latere recto.

Jungatur BH, & a puncto G ducatur GM parallela ipsi AH, & occurrens BH in M, & per M ducatur MN parallela AB occurrens AH in N, & compleatur rectangulum MNHO.

Quoniam igitur est rectangulum AGB ad quadratum ex GF, ut AB

1.25.



pag.94.

AB ad AH, hoc est, ut GB ad GM, hoc est, ut rectangulum AGB ad rectangulum AGM; erit AGB ad quadratum ex GF, ut idem AGB ad rectangulum AGM; quare quadratum ex GF æquale est rectangulo AGM, quod quidem adjacet lateri recto AH, latitudinem habens AG, exceditque (rectangulum sciz. HAGO) rectangulo MNHO simili ipsi BAHP; unde & *Hyperbolæ* nomen huic lineæ ab Apollonio inditum est.

Cor. Et perspicuum est quadratum ex GF æquale fore rectangulo AGM, quamvis AH non fuerit ad rectos angulos ipsi AB.

PROP. XLIX. PROBL.

Datâ positione & magnitudine rectâ AB, & puncto F; Hyperbolam describere cujus axis transversus erit recta data AB, quæque transibit per punctum F: oportet autem perpendicularem a puncto dato ad rectam AB cadere in ipsam productam. Fig. 29.

Ducatur ad AB perpendicularis FG, & inveniatur recta DE, ad cujus quadratum, quadratum ex AB sit, ut rectangulum AGB ad quadratum ex FG; bifariamque & ad angulos rectos se invicem secent AB, DE; & axibus AB, DE, quorum AB sit transversus, describatur Hyperbola AF per Propositionem 37. hujus: transibit hæc per punctum F (Cor. 2. 28. hujus).

PROP. L. PROBL.

Datâ positione & magnitudine rectâ DE, datoque puncto F; Hyperbolam describere, cujus axis secundus erit DE, quæque transibit per punctum F. Fig. 29.

Bifariam secetur DE in C, & ducatur FH ad DE perpendicularis, & inveniatur recta AB, ad cujus quadratum, quadratum ex DE sit, ut quadrata ex CD, CH simul, ad quadratum ex FH; bifariamque & ad angulos rectos se invicem secent DE, AB, & axibus AB, DE, quorum AB sit transversus, describatur Hyperbola; transibit hæc per punctum F (Cor. 2. 29. huj.).

PROP.

PROP. LI.

In Hyperbola axis transversus est minima omnium diametrorum transversarum: angulusque contentus quavis aliâ diametro transversâ & contingente per ipsius verticem ductâ, minor est angulo recto.

FIG. 29. Sit Hyperbola, cujus semiaxis transversus CA, quævis vero alia semidiameter sit CF; & a vertice ejus F ducatur FG perpendicularis ad axem CA, est igitur CF major CG, & proinde multo major quam CA. Ducatur contingens a puncto F axi occurrens in K, & quoniam angulus CFG est acutus, erit CFK magis acutus.

PROP. LII. PROBL.

Hyperbolæ positione datæ AF diametrum, centrum, axes, asymptotos & focos invenire.

DUcantur duæ rectæ parallelæ Hyperbolâ terminatæ, & recta ipsas bifariam secans erit diameter (Cor. 3. 31. huj.): eodem modo inveniatur alia diameter, punctumque quo sibi invicem occurrunt erit centrum (Def. 4.)

FIG. 29. Sumatur in Hyperbola punctum quodvis F, & a centro C ducatur CF; describatur vero centro C & intervallo CF circulus, qui si nuspiam Hyperbolæ occurrere ponatur præter in puncto F; erit CF minima diametrorum transversarum, & igitur axis transversus. Si vero circulus Hyperbolæ rursus occurrat in alio puncto L, jungatur FL, & in puncto G bifariam secetur, junctaque CG Hyperbolæ occurrat in A; erit CA semiaxis transversus. Nam quoniam æquales sunt FG, GL, erit FL ordinatim applicata diametro CG, & igitur recta, quæ per verticem A ipsi FL parallela ducitur, Hyperbolam continget, (32. huj.); & rectus est angulus quem cum diametro CA comprehendit, quoniam scil. rectus est angulus FGA; ergo est CA axis transversus per præcedentem propositionem.

Dein, ad inveniendum axem secundum, ducatur per centrum C recta ipsi AC perpendicularis, & in ea sumatur CD, ad cujus quadratum, quadratum ex CA eandem habet rationem quam habet rectan-

ctangulum BGA (factâ sciz. CB æquali ipsi CA) ad quadratum ex GF; erit CD semiaxis secundus, ut patet ex Prop. 7. huj.

Denique inventis axibus, asymptoti inveniuntur ex Defin. 10.

Si autem Hyperbolæ oppositæ positione dentur, asymptoti sic facilius inveniantur. Per centrum C ducatur quævis diameter transversa AB, & huic ducatur parallela, Hyperbolis terminata in O, P; & ad rectam OP applicetur utrinque rectangulum æquale quadrato ex CA deficiens quadrato; quod fieri potest, quoniam CA minor est dimidio ipsius OP (Cor. 4. 15. huj.) sintque Q, R applicationis puncta, erunt junctæ CQ, CR asymptoti (Cor. 5. 15. hujus.) Inveniuntur autem foci ut in Propositione 37.

PROP. LIII. PROBL.

Datis positione Hyperbolæ asymptotis, & puncto in ipsa; ejusdem axes invenire, atque ipsam describere.

Sint asymptoti positione datæ AC, BC, punctumque datum sit D; & factum puta, sciz. sint FCE, GCH axes, quorum FE, qui est intra angulum ACB in quo est D punctum, necessario erit axis transversus; ducatur per E recta ipsi GH parallela, occurratque asymptotis in K, L punctis; est igitur (per Def. 10. huj.) KL æqualis ipsi GH, bifariamque secta in E; & quoniam in triangulis KEC, LEC æquales sunt KE, EL, & anguli ad E recti; æquales erunt anguli ECK, ECL; datus autem est angulus KCL, quare ipsius dimidium KCE dabitur; & positione datur KC, punctumque C; positione igitur datur CE (29. Dat.): per datum punctum D ducatur DMN parallela ipsi CE, occurratque asymptotis in M, N; est igitur DN positione data (28. Dat.) & puncta M, N (25. Dat.); quare DM, DN magnitudine dantur (26. Dat.), ideoque datum est magnitudine rectangulum MDN; huic autem æquale est quadratum ex CE (Cor. 1. 15. huj.) datur igitur ex CE quadratum, ipsaque CE magnitudine (55. Dat.) sed & positione, ut ostensum, quare punctum E & recta KEL positione dantur (27. 29. Dat.) ideoque & magnitudine, quoniam sciz. CA, CB positione dantur; & est GH parallela & æqualis ipsi KL, datur igitur GH magnitudine, sed & positione propter datum punctum C quod ipsam bifariam secat; FIG. 30.

N

cat; axes igitur EF, GH positione & magnitudine dantur: quare per Prop. 37. hujus describi poterit Hyperbola.

Fig. 30. Componetur vero ita: Bifariam secetur angulus ACB rectâ CE, & ductâ DMN parallelâ ipsi CE, rectangulo MDN fiat utrumque quadratum ex CE, CF æquale; & per E ducatur KEL ipsi CE ad rectos angulos asymptotis in K, L occurrens; per C vero ducatur GCH ipsi KEL parallela & æqualis, bifariamque secetur in C; dein axibus EF, GH, quorum transversus sit EF, describatur (per 37. huj.) Hyperbola; erunt AC, AB, ipsius asymptoti, & transibis per D punctum. Nam quoniam, ex constructione, est KEL parallela & æqualis axi secundo GH, erunt CK, CL asymptoti (per Def. 10. huj.) & est MDN rectangulum æquale quadrato ex CE, ergo punctum D est in Hyperbola (Cor. 1. 15. huj.)

Datis autem asymptotis AC, BC & puncto in Hyperbola D, poterunt quotcunque quis voluerit puncta in ipsa vel opposita Hyperbola facile inveniri, ducendo sciz. per D rectas quotcunque ADB, D*ab* asymptotis occurrentes in A, B & *a*, *b*; & sumendo BO, *bo* ipsis AD, *a*D æquales, & ita ut puncta D, O & D, *o* sint simul vel intra, vel extra puncta A, B & *a*, *b*: erunt enim O, *o* puncta in Hyperbolis (per 19. huj.)

PROP. LIV. PROBL.

Fig. 31. Datis positione & magnitudine duabus rectis ACB, DCE, se mutuo bifariam secantibus in C; describere Hyperbolas oppositas, quarum una ex rectis sciz. AB sit diameter transversa, altera vero DE sit secunda ipsi AB conjugata.

FActum puta, sintque CF, CG asymptoti, quibus occurrat recta per verticem A diametri transversæ ducta ipsi DE parallela, in F, G; erit igitur FG æqualis ipsi DE, bifariamque in A secabitur (per Def. 11. huj.); datur autem DE magnitudine, quare data est FG, ipsiusque dimidium AF magnitudine; sed & positione, quoniam sciz. per datum punctum A parallela est positione datæ DE (28. Dat.); ergo datum est F punctum (27. Dat.) similiter datum est G; & datur punctum C, quare asymptoti CF, CG, positione dan-

dantur; & est datum punctum A in Hyperbola: ergo per præcedentem ipsa describi poterit.

Componetur vero ita: Per verticem A diametri transversæ, ducatur recta FAG parallela & æqualis diametro secundæ DE, & ita ut bifariam secta sit in A; jungantur CF, CG, & per præcedentem describatur Hyperbola, cujus asymptoti sint CF, CG, quæque transeat per punctum A; & eodem modo ope puncti B describatur Hyperbola opposita: erit AB ipsarum diameter transversa, & DE secunda ipsi conjugata.

Nam quoniam CF, CG asymptoti sunt Hyperbolarum, & per punctum A in una ipsarum ducta est FAG, quæ bifariam secatur in A; recta FG Hyperbolam in A continget (23. huj.) & est DE parallela & æqualis ipsi FG, & in centro C bifariam secta est; ergo est DE diameter secunda conjugata transversæ AB (per Def. 11. huj.) FIG. 31.

PROP. LV.

Datâ positione & magnitudine diametro Hyperbolæ, datâque positione rectâ quæ a dato in Hyperbola puncto ordinatim diametro applicatur; ipsam describere.

Cas. 1. Quando data est diameter transversa Hyperbolæ.

Sit AB diameter transversa data, cui, a dato in Hyperbola puncto H, ordinatim applicatur recta positione data HK; & bifariam secetur AB in C, & per C ducatur recta parallela ipsi HK, in qua sumantur CD, CE æquales, ita ut rectangulum AKB sit ad quadratum ex HK, ut quadratum ex AC ad quadratum ex CD, vel CE; & ope præcedentis describantur Hyperbolæ oppositæ quarum diameter transversa sit AB, & secunda ipsi conjugata sit DE; transibit ipsarum una per punctum H (per Cor. 2. 28. huj.) FIG. 31.

Cas. 2. Quando data est diameter secunda.

Sit DE diameter secunda data, cui a dato in Hyperbola puncto H ordinatim applicatur recta positione data HL; & bifariam secetur DE in C, & per C ducatur recta parallela ipsi HL, in qua sumantur CA, CB æquales, ita ut quadrata ex LC, DC simul sint ad quadratum ex HL, ut quadratum ex DC ad quadratum ex AC, vel CB; & ope præcedentis describantur Hyperbolæ, quarum di-

ameter transversa est AB & secunda ipsi conjugata est CD; transibit ipsarum una per punctum H (Cor. 2. 29. huj.) sciz. ea quæ jacet ad partes rectæ DE, ad quas est datum punctum H.

PROP. LVI.

Si conus plano per axem secetur, secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis, & communis sectio trianguli per axem, & plani secantis, producta cum uno latere trianguli per axem extra verticem coni conveniat: linea quæ communis est sectio plani secantis & superficiei conicæ, erit Hyperbola, diametrum transversam habens communem sectionem trianguli per axem & plani secantis.

Fig. 32. Sit conus, cujus vertex punctum A, basis BC circulus, seceturque plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ABC; secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam DE ad BC basim trianguli ABC perpendicularem, faciatque sectionem in superficie coni lineam DFE; & recta FG, communis sciz. sectio trianguli per axem & plani secantis, producta cum ipso AC latere trianguli ABC extra coni verticem conveniat in puncto H: erit linea DFE Hyperbola, & FG una ex ipsius diametris transversis.

Sumatur enim in sectione DFE quodlibet punctum K, & per K ducatur KL ipsi DE parallela, usque ad FG; per L autem ducatur ipsi BC parallela MN; est igitur (15. 11.) planum quod transit per KL, MN plano per DE, BC, hoc est, ipsi basi coni æquidistans; ideoque (per 23. lib. 1.) planum per KL, MN est circulus, cujus diameter MN: est autem (per 10. 11.) KL ad MN perpendicularis, quia & DE ad BC: rectangulum igitur MLN æquale est quadrato ex KL (35. 3.); & similiter est BGC rectangulum æquale quadrato ex DG; quadratum igitur ex DG est ad quadratum ex KL, ut rectangulum BGC ad rectangulum MLN, est autem BG ad ML, ut FG ad FL; & GC ad LN, ut GH ad LH; quare rationes ex hisce æqualibus compositæ, sunt inter se æquales; ideoque (23.

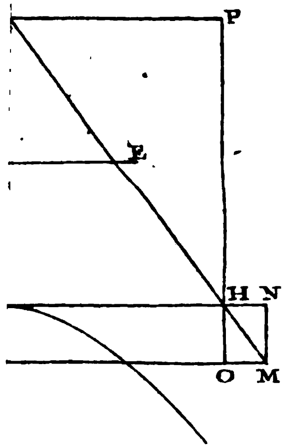


Fig. 29.

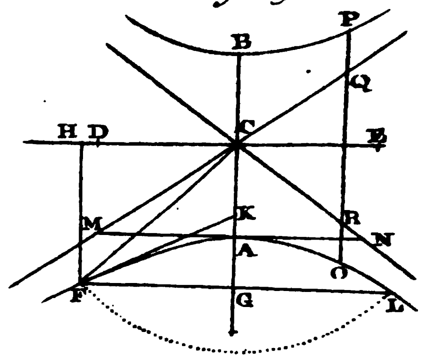
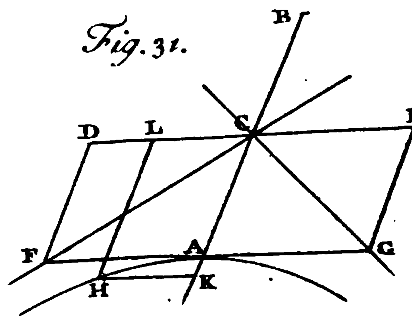


Fig. 31.



.30.

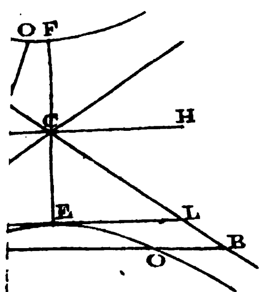
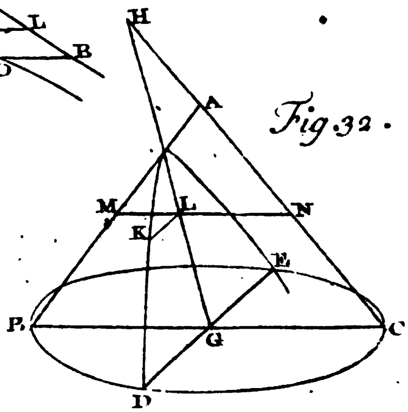


Fig. 32.



pag. 100.

(23. 6.) est rectangulum BGC ad rectangulum MLN, ut rectangulum FGH ad rectangulum FLH; quare & quadratum ex DG est ad quadratum ex KL, ut rectangulum FGH ad rectangulum FLH. Describatur igitur (per 55. huj.) Hyperbola, cujus diameter transversa sit FH, & in qua sit DG ordinatim applicata ipsi FH; & quoniam punctum D est ex constructione in hac Hyperbola, erit in ea punctum K (per Cor. 3. 28. huj.) Et similiter ostendentur omnia sectionis DEF puncta in eadem esse.

SECTI-

SECTIONUM CONICARUM

LIBER QUARTUS.

PROP. I.

Si duæ rectæ lineæ, sectionem conicam contingentes, occurrant inter se; diameter quæ rectam contactus conjungentem bifariam secat, transibit per occursum contingentium.

Fig. 1, 2, 3, 4. SIT sectio quævis conica AGB, ipsamque in punctis A, B contingant rectæ AC, BC; &, junctâ AB, bifariam secetur in D: diameter ducta per D transibit per punctum C, occursum sciz. contingentium.

Non enim, sed, si fieri potest, occurrat diameter per D ducta contingentibus alibi quam in C, ut in E, F punctis, sectioni vero eadem occurrat in G; vel, in casu quo rectæ contingunt Hyperbolas oppositas, occurrat diameter sectioni conjugatæ in G. Igitur, Fig. 1. quoniam recta AB ordinatim applicatur diametro DE, & est AE contingens, erit in Parabola recta DG æqualis ipsi GE; & quoniam est BF contingens, erit eadem DG æqualis GF; quare æquales

les sunt inter se GE, GF : quod fieri non potest. Transibit ergo diameter per C.

In aliis vero sectionibus, iisdem manentibus, sit H centrum sectionis; & quoniam est AB ordinatim applicata diametro DH, & sectionem contingit AE, proportionales erunt HD, HG, HE (17. lib. 2. 33. lib. 3.) Similiter, quoniam contingens est BF, proportionales erunt HD, HG, HF, æquales igitur sunt HE, HF; quod fieri non potest : & proinde transibit diameter per C. Fig. 2, 3, 4.

Cor. 1. Hinc manifestum est, rectam quæ per concursum duarum contingentium, & medium punctum rectæ conjungentis earundem contactus transit, diametrum esse.

Cor. 2. Et diametrum quæ per concursum contingentium transit, bifariam secare rectam quæ contactus conjungit.

Cor. 3. Et si recta contingens sectionem diametro occurrat, perque punctum contactûs ducatur ordinatim diametro applicata, & producatur ad sectionem; recta quæ per occursum contingentis cum diametro, & punctum quo ordinatim applicata sectioni rursus occurrit, continget in hoc puncto sectionem.

PROP. II. PROBL.

Datâ positione sectione conicâ, ejusque diametro; per datum in sectione punctum ordinatim diametro applicatam ducere.

Sit sectio primum Parabola, cujus diameter CH, datumque in sectione sit punctum B, & ad diametrum ducatur quævis BH, & producatur ad K, ut æquales sint BH, HK, perque punctum K ducatur ipsi CH parallela KA, quæ Parabolæ necessario occurret in puncto aliquo A (4. lib. 1.); erit juncta BA ordinatim applicata diametro CH. Nam, propter æquales BH, HK, & parallelas DH, KA, æquales erunt BD, DA. Fig. 1.

Secundo, Sit sectio Ellipsis, vel oppositæ Hyperbolæ, sitque data diameter KM, punctumque B; ducatur per B diameter BKL, & per L, ipsi KM parallela, ducatur LA, quæ sectionem vel continget, vel ipsi rursus occurret : si contingat, erit diameter KM conjugata ipsi BL in Ellipsi (14. lib. 2.) ideoque BL parallela est or- Fig. 2.

dinatim

dinatim applicatis diametro KM (Cor. 4. 14. lib. 2.) In Hyper-
FIG. 4. bola vero, quoniam KM parallela est contingenti per L, erit KM eâdem positione cum diametro secunda ipsius KL, (Def. 11. lib 3.) proinde parallela erit KL ordinatim applicatis diametro KM. Si vero LA sectioni rursus occurrat, ut in A, jungatur BA quæ occurrat diametro KM in D: & quoniam æquales sunt BK, KL, æquales erunt BD, DA; igitur est BA ordinatim applicata diametro KM.

COR. Hinc, a quovis puncto dato poterit duci ad diametrum positione datam, in sectione positione data, recta ordinatim ipsi applicatis parallela.

PROP. III. PROBL.

Datâ positione sectione conicâ, & puncto non intra sectionem dato; ab eo rectam ducere quæ sectionem contingat.

FIG. 1. *Cas.* 1. SIt datum punctum A in sectione, & ab ipso ducatur ad diametrum quamlibet MD recta AD eidem ordinatim applicata (2. huj.) producatur autem in Parabola diameter supra verticem ipsius M usque ad C, ut MC æqualis sit ipsi MD, juncta AC continget Parabolam in A (per Cor. 14. lib. 1.) In Ellipsi vero
FIG. 2, 3, 4. & Hyperbola, sit K centrum sectionis, & ipsis KD, KM sumatur tertia proportionalis KC; quæ ponatur ad contrarias partes centri ad quas est KD, si KD fuerit Hyperbolæ diameter secunda, secus ad easdem; & jungatur AC: continget hæc sectionem in A (per 18. lib. 2. & 34. lib. 3.)

Cas. 2. Si vero punctum fuerit extra sectionem, sit illud C, & sectio data sit AB; & per C ducatur diameter CD, sectioni occurrens in M, vel, si fuerit secunda diameter Hyperbolæ, sit ejus vertex seu terminus M; & si sectio fuerit Parabola, fiat MD æqualis ipsi MC, & per punctum D ducatur BDA, parallela ordinatim applicatis diametro CD; junctæ CA, CB, sectionem contingent (Cor. Prop. 14. lib. 1.) Si autem sectio fuerit Ellipsis aut Hyperbola,
FIG. 1, 2, 3, 4. sit ejus centrum K, & duabus KC, KM inveniatur tertia proportionalis KD, (ponenda ad partes centri contrarias iis ad quas est KC, si KC fuerit diameter Hyperbolæ secunda, secus ad easdem,)

perque

perque punctum D ducatur recta ordinatim applicatis diametro KC parallela, occurratque sectioni in A, B: junctæ AC, CB sectionem contingent (18. lib. 2. 34. lib. 3.) Si vero punctum C datum fuerit in asymptoto Hyperbolæ, bifariam secetur KC segmentum asymptoti inter centrum & punctum datum in puncto N, & per N ducatur recta NO alteri asymptoto parallela, quæ sectioni occurret (18. lib. 3.) & per punctum occursûs O ducatur recta ad punctum datum C; continget hæc sectionem (23. lib. 3.) Fig. 3. n. 2.

PROP. IV. PROBL.

Datâ positione Ellipsi, cujus axis alteruter est ACB; invenire duas diametros conjugatas inter se æquales.

Factum puta; sintque diametri conjugatæ æquales DCE, FCG: Fig. 5. & quoniam axis est CB, æquales erunt anguli ECB, GCB, (ut constat ex demonstratione Prop. 26. lib. 2. de inveniendis axibus); a puncto B ducatur BH, ipsi GC parallela, quæ occurrat Ellipsi rursus in K, bifariam igitur secabitur BK in H (Cor. 4. 14. lib. 2.) &, propter parallelas, est angulus HBC æqualis angulo GCB, hoc est, angulo BCH; æqualis igitur est CH ipsi BH, & æqualis est BH ipsi HK; ergo circulus, centro H intervallo HB descriptus, transibit per puncta C, K; & angulus BCK in semicirculo rectus erit, est igitur CK axis alter; & dantur CB, CK positione & magnitudine, quare BK positione & magnitudine datur, igitur GC, quæ ipsi parallela ducta est per datum punctum C, positione dabitur (28. Dat.) & datum est H punctum, igitur CH positione datur, & proinde DE, FG positione dantur.

Componetur vero ita: Sint AB, KC axes Ellipseos; &, junctâ BK, ducatur eidem parallela CG; bifariam vero sectâ BK in H, ducatur per H diameter CE: erunt CG, CE diametri conjugatæ, & inter se æquales. Nam quoniam BK bifariam secta est in H, diametro CE, erit CG quæ BK parallela est, diameter ipsi CE conjugata (Cor. 4. 14. lib. 2.); & quoniam est angulus BCK rectus, centrum circuli circa triangulum BCK descripti erit in H (Cor. 5. 4.): ergo æquales sunt HC, HB rectæ, ideoque angulus HCB æqualis est angulo HBC, hoc est, angulo alterno BCG; æquales igitur

O

gitur sunt ECB, BCG anguli, quare & semidiametri CE, CG sunt æquales.

Cor. 1. Hinc, si a vertice B axis majoris ducantur ad vertices axis minoris rectæ, BK, BL, erit angulus KBL, qui iisdem comprehenditur, æqualis angulo ECG, qui comprehenditur diametris conjugatis æqualibus.

Cor. 2. Et quoniam ostensum fuit alterutrum ex diametris conjugatis æqualibus FG parallelam esse rectæ BK, quæ vertices axium conjungit, manifestum est nullum aliud par diametrorum conjugatarum esse inter se æquales.

PROP. V. PROBL.

Datâ coni sectione, contingentem ducere, quæ cum axe, versus partes sectionis, angulum faciat dato angulo acuto æqualem.

In Parabola inveniatur axis, focus & directrix; in Ellipsi vero axis major & foci; &, in utraque sectione ductâ quavis rectâ, quæ datum cum axe, versus utramvis ipsius partem, comprehendit angulum, huic ducatur parallela recta quæ sectionem contingat (per Prop. 6. lib. 1. & Prop. 12. lib. 2.): manifestum est hanc cum axe angulum comprehendere, dato angulo æqualem.

In Hyperbola autem inveniantur asymptoti; &, ductâ quavis rectâ quæ cum axe comprehendit angulum angulo dato æqualem, huic ducatur parallela quæ sectionem contingat (per 24. lib. 3.); & comprehendet hæc cum axe angulum dato angulo æqualem. Ex determinatione autem Problematis in Propositione 24. lib. 3. necesse est ut recta ducta utramque ejusdem Hyperbolæ asymptoton secet; vel, quod eodem redit, oportet datum angulum acutum majorem esse quam est dimidium ejus qui ab asymptotis comprehenditur.

Cor. Et eodem prorsus modo inveniri poterit recta, quæ Parabolam positione datam contingat, faciatque, cum diametro per contactum, angulum dato angulo acuto æqualem: quævis enim in Parabola

rabola diameter axi parallela est, ideoque æquales cum contingente facient angulos.

PROP. VI. PROBL.

Datis positione & magnitudine duabus Ellipseos diametris conjugatis, alias duas conjugatas invenire, quæ faciant angulum dato angulo acuto æqualem; vel, quod eodem redit, rectam Ellipsin contingentem ducere, quæ cum diametro per contactum faciat angulum dato angulo acuto æqualem. ☞ *Si enim angulus datus rectus fuerit, Problema jam solutum est in Prop. 27. lib. 2.*

Cas. 1. QUando diametri datæ sunt axes.

Sint AB, CD axes dati, sibi mutuo occurrentes in centro E; & factum puta, sciz. sint EF, EG duæ diametri conjugatæ, quæ comprehendunt angulum FEG, dato angulo æqualem; & per B ducatur recta axi CD parallela, quæque propterea Ellipsin in B continget, & positione dabitur (per 28. Dat.); occurrat hæc diametris in F, G, & circa triangulum FEG describatur circulus, cui occurrat EB in H: quoniam igitur diametri conjugatæ sunt EF, EG, rectangulum FBG æquale erit quadrato ex ED (per 21. lib. 2.); quare, propter circulum (35. 3.), rectangulum EBH eidem quadrato ex ED æquale erit: datur autem quadratum ex ED, dabitur proinde rectangulum EBH; & data est EB positione & magnitudine, datur igitur BH positione & magnitudine; & datum est B punctum, quare & punctum H, (27. Dat.) & recta EH positione & magnitudine dabitur; & bifariam secta EH in K, dabitur punctum K; & ducta KL ipsi EH ad rectos angulos, positione dabitur KL (29. Dat.); in hac autem centrum erit circuli FEG, (Cor. 1. 3.), sit illud M, & jungantur ME, MF, MG; & quoniam datus ex hypothesi est angulus FEG, dabitur ipsius duplex ad centrum angulus sciz. FMG, & datur ratio FM ad MG, æquales enim sunt; quare (per 41. Dat.) specie datur triangulum FMG, ideoque angulus MGB datus est; & positione dantur rectæ parallelæ BG, KL, ut ostensum fuit; ergo recta MG magnitudine datur (per 32. Dat.) ideoque & ipsi æqualis ME; datum autem est punctum E, Fig. 6.

& recta KL positione, quare recta EM positione datur, (31. Dat.) & punctum M (25. Dat.); circulus igitur FEG positione & magnitudine datus est, & propterea puncta F, G, in quibus rectæ positione datæ occurrit, data sunt; ergo rectæ EF, EG positione dantur. *Q. E. I.*

Fig. 6. Quoniam vero ad compositionem requiritur, ut recta EM magnitudinis datæ, a dato puncto E ad rectam positione datam KL ducatur; quod non semper fieri potest, quoties scilicet recta EM minor fuerit ipsâ EK; ideo constructio Problematis non semper possibilis est. Fiet autem modo singulari, si angulus datus talis fuerit, ut recta KN ducta a puncto K ad rectam BG, faciens angulum BKN isti angulo æqualem, æqualis fuerit ipsi KE; & propterea determinatur ille angulus, & diametri conjugatæ quæ ipsum comprehendunt, producendo EB ad H punctum quod faciat rectangulum EBH æquale quadrato ex ED, & bifariam secta EH in K, centro K, intervallo KE describendo circulum, qui occurrat BG in N, O punctis; junctæ enim EN, EO erunt diametri conjugatæ, & angulus OEN erit angulus quæsitus. Nam, propter circulum OEN, est rectangulum OBN æquale ipsi EBH, hoc est, ex constructione, quadrato ex ED; diametri igitur conjugatæ sunt EO, EN (per Cor. 21. lib. 2.) & angulus BKN æqualis est angulo OEN, qui ab ipsis comprehenditur (20. 3.) Quoniam vero rectangulum OBN æquale est quadrato ex ED, suntque OB, BN (3. 3.) æquales, erit utraque OB, BN æqualis ipsi ED, seu EC; & est EB æqualis ipsi EA, & anguli ad B & E recti; junctis igitur AC, AD, erit (4. 1.) triangulum EBN æquale ipsi AED, & recta EN ipsi AD parallela; similiter erit EO parallela ipsi AC, & propterea angulus extremus OEN æqualis est angulo CAD, qui ductis a vertice axis majoris ad vertices minoris comprehenditur, ideoque (per Cor. 1. 4. huj.) diametri conjugatæ EO, EN sunt inter se æquales.

Inquirendum autem est, an hic angulus OEN major an minor sit quovis alio angulo, qui diametris conjugatis comprehendi poterit; quod quidem ita determinatur.

Fig. 6. Manentibus jam descriptis, sint EF, EG aliæ duæ quæcunque diametri conjugatæ, quæ ipsi BN occurrant in F, G; est igitur (per 21. lib. 2.) rectangulum FBG æquale (quadrato ex ED, hoc est) rectangulo EBH; quare in circulo sunt F, E, G, H puncta (convers. 35. 3.) Describatur, sitque centrum ejus M, quod in recta

KL,

KL, quæ ipsam EH bifariam & ad angulos rectos secat, invenietur (Cor. 1. 3.); junctisque MF, MG, ducatur KP parallela ipsi MG, & MQ ipsi KB; est igitur angulus QMG, seu BKP, æqualis ipsi FEG (20. 3. & 4. 1.) & similiter angulus BKN angulo OEN; comparandus igitur est angulus BKP cum angulo BKN, ideoque recta KP comparanda est cum KN, hoc est, ME cum recta EK: sed EM major est EK (19. 1.); quare KP major erit KN, & angulus BKP, seu QMG, major angulo BKN; hoc est, erit angulus FEG major angulo OEN; ergo est angulus OEN, quem faciunt diametri conjugatæ æquales, minimus omnium qui a duabus diametris in Ellipsi conjugatis comprehendi poterit. Et similiter ostendetur, diametros quæ propiores sunt ipsis EO, EN, minores comprehendere angulos cum diametris ipsis conjugatis, quam comprehendunt diametri remotiores cum diametris ipsis conjugatis.

Componetur vero Problema ita: Sint AB, CD axes Ellipsis positione datæ; & junctis AC, AD, si angulus datus æqualis fuerit ipsi CAD, erunt EO, EN quæ ipsis AC, AD parallelæ sunt, diametri quæsitæ; ut in præmissis ostensum est. Si vero angulus datus æqualis non fuerit ipsi CAD, erit eo necessariè major, alioquin impossibile erit Problema, quoniam angulus CAD minimus est quem comprehendere poterint duæ quævis diametri conjugatæ in Ellipsi; sit igitur major, & producta EB ad H, ita ut rectangulum EBH æquale sit quadrato ex ED, bifariam secetur EH in K; & ducatur KL ipsi EH ad rectos angulos, fiatque angulus BKP æqualis angulo dato; est igitur ex hypothesi angulus BKP major OEN, hoc est, ipso BKN; quare & recta KP major erit ipsa KN, seu KE; ideoque circulus centro E, & intervallo æquali ipsi KP descriptus necessariè occurret rectæ KL duobus in punctis M, *m*, quorum alterutrum sit M; & centro M, intervallo ME, describatur alter circulus, qui transibit per H quoniam scil. MK bifariam & ad rectos angulos secat ipsam EH; ideoque occurret rectæ BN; occurrat in F, G punctis; junctâque MG, ducatur MQ ipsi KB parallela, quoniam igitur est rectangulum FBG æquale ipsi EBH, hoc est, quadrato ex ED, diametri EF, EG, sibi mutuo conjugatæ erunt (Cor. 21. lib. 2.); & est angulus FEG æqualis angulo QMG, hoc est, dato angulo BKP. *Q. E. D.* Fig. 6.

Cas. 2. Quando diametri conjugatæ datæ non sunt axes. Fig. 7.

Sint AB, CD diametri conjugatæ datæ sibi mutuo occurrentes in

E;

E; & factum puta, sciz. sint EF, EG duæ diametri conjugatæ, quæ comprehendunt angulum FEG dato angulo æqualem: & per B ducatur recta ipsi CD parallela, quæque propterea Ellipsin in B continget, & positione dabitur (per 28. Dat.); occurrat hæc diametris in F, G, & circa triangulum FEG describatur circulus, cui occurrat EB in H: quoniam igitur diametri conjugatæ sunt EF, EG, rectangulum FBG æquale erit quadrato ex ED (per 21. lib. 2.) quare propter circulum (35. 3.) rectangulum EBH eidem quadrato ex ED æquale erit; datur autem quadratum ex ED, quare dabitur rectangulum EBH; & data est EB positione & magnitudine, datur igitur BH positione & magnitudine; & datum est B punctum, quare & punctum H (27. Dat.) & recta EH positione & magnitudine dabitur (26. Dat.); & bifariam secta EH in K, dabitur punctum K; & ducta KL ipsi EH ad rectos angulos, positione dabitur KL (29. Dat.); in hac autem erit centrum circuli FEG (Cor. 1. 3.), sit illud M, & jungantur ME, MF, MG; & quoniam ex Hypothesi datus est angulus FEG, dabitur angulus FMG ad centrum qui ipsius FEG duplex est; & datur ratio FM ad MG, quare (per 41. Dat.) specie datur FMG triangulum; ideoque angulus MFG datus est: & positione dantur rectæ KL, FL ut ostensum fuit, ideoque datum est punctum L, & juncta LE positione dabitur; quare dantur anguli KLE, KLF; & angulus MFL seu MFG datus ostensus fuit; ergo (per 40. Dat.) specie datur triangulum MFL, ideoque datur ratio MF seu ME ad ML; & datus est MLE angulus, quare triangulum EML specie datur (per 44. Dat.); datus igitur est angulus LEM; & datur LE positione, punctumque E; ergo EM positione datur (29. Dat.) punctumque M (25. Dat.) ipsaque ME magnitudine dabitur (26. Dat.); quare circulus centro M intervallo ME descriptus positione datur; ideoque dantur puncta F, G quibus rectæ positione datæ BL occurrit (25. Dat.); & proinde diametri conjugatæ EF, EG positione dantur (26. Dat.)

Fig. 7. Quoniam vero ad compositionem requiritur ut a quovis in recta LK puncto N ducatur ad BL perpendicularis NO, & NP quæ cum ipsa comprehendat angulum ONP æqualem dato; & ut centro N intervallo NP describatur circulus qui occurrat ipsi LE alicubi in Q, & junctæ NQ ducatur a puncto E recta EM parallela; ut ita scilicet inveniatur M centrum circuli describendi FEG: & quoniam non semper possibile sit ut circulus centro N intervallo NP descriptus,

ſcriptus, occurrat rectæ LE; ideo conſtructio Problematis non ſemper poſſibilis eſt: fiet autem modo ſingulari quando acciderit circulum illum rectam LE contingere, in quo caſu circulus FEG centro M intervallo ME deſcriptus eandem LE quoque continget: angulus autem & diametri conjugatæ ipſum comprehendentes, quæ hoc efficient, in hunc modum invenientur. Puta factum, ſcilicet ſint ER, ES diametri conjugatæ, occurrentes ipſi BL in R, S, & circulus per puncta R, E, S deſcriptus contingat ipſam LE in E; igitur centrum hujus erit in recta ET quæ ipſi EL eſt ad angulos rectos (19. 3.) idem vero eſt in recta LK, ut in præmiſſis oſtenſum fuit; quare erit in ipſarum interſectione T; & propter LK, ET poſitione datas, datum erit T punctum; ideoque circulus centro T intervallo TE deſcriptus poſitione datur, & puncta R, S in quibus rectæ BL occurrit, & proinde ipſæ ER, ES.

Componetur vero hoc ultimum ita: Producatur EB ad H punctum quod faciat rectangulum EBH æquale quadrato ex ED, & bifariam ſectâ EH in K, ipſi ad rectos angulos ducatur KL; cui, in L, occurrat recta quæ per B ducta eſt parallela ipſi ED; & per E ducatur ET ad rectos angulos junctæ EL, occurratque LK in T; centro autem T, intervallo TE deſcribatur circulus; qui, propter æquales KE, KH, & angulos ad K rectos, tranſibit per H (4. 1.), ideoque neceſſarìe occurret rectæ BL; occurrat in R, S punctis, & jungantur ER, ES. Quoniam igitur, propter circulum (35. 3.), rectangulum RBS æquale eſt ipſi EBH, hoc eſt, ex conſtructione, quadrato ex ED; erunt ER, ES diametri conjugatæ (per Cor. 21. lib. 2.); & quoniam eſt EL ad rectos angulos ipſi ET, recta EL circulum RES continget in E. Quæ demonſtrari oportebat. Fig. 7.

Inquirendum autem eſt an angulus RES, diametris conjugatis ER, ES comprehenſus, major vel minor ſit quovis alio angulo qui diametris conjugatis comprehendi poterit; quod quidem ita determinatur.

Manentibus jam deſcriptis, ſint EF, EG aliæ duæ quæcunque diametri conjugatæ, quæ ipſi BL occurrant in F, G punctis; eſt igitur (per 21. lib. 2.) rectangulum FBG æquale (quadrato ex ED, hoc eſt) rectangulo EBH; quare in circulo ſunt F, E, G, H puncta: deſcribatur, ſitque centrum ejus M, quod in recta KL, quæ ipſam EH biſariam & ad angulos rectos ſecat, invenietur; junctique Fig. 7.

que MF, MG, TS, ducatur MV parallela junctæ TE, & MX, TY ad BL perpendiculares; ipsi vero TS sit MZ parallela: comparandus igitur est angulus FEG cum angulo SER, hoc est comparandi sunt anguli ad centra FMX, STY (20. 3.), seu angulus FMX cum angulo ZMX; ideoque comparanda est recta FM cum recta ZM; est autem FM æqualis ipsi ME, & ZM æqualis est ipsi MV; nam propter parallelas est MV ad TE, ut (LM ad LT, hoc est, ut) MZ ad TS; & æquales sunt TE, TS, quare æquales sunt MV, MZ; comparanda igitur est ME cum ipsa MV; est autem angulus MVE rectus, quia rectus est TEV; ergo major est ME ipsa MV (19. 1.): igitur est FM major ZM, ideoque angulus FMX major erit angulo ZMX, hoc est, angulo STY; ergo & angulus FEG major est angulo SER. Est igitur angulus SER minimus omnium qui a duabus diametris in Ellipsi conjugatis comprehendi poterit. Et similiter ostendetur diametros conjugatas quæ propiores sunt ipsis ER, ES minores comprehendere angulos quam diametri conjugatæ remotiores.

FIG. 7. Componetur vero Problema in casu secundo propositum ita: Sint AB, CD diametri Ellipseos conjugatæ positione datæ; & inveniantur, ut in præmissis ostensum fuit, diametri ER, ES conjugatæ quæ minimum comprehendunt angulum; & si angulus datus æqualis fuerit ipsi SER, erunt ER, ES diametri quæsitæ. Si vero angulus datus æqualis non fuerit angulo SER, erit ipso major, alioquin impossibile erit Problema; sit igitur major, & producta EB ad H, ita ut rectangulum EBH æquale sit quadrato ex ED, bifariam secetur EH in K; & ducatur KL ipsi EH ad rectos angulos, occurratque rectæ quæ Ellipsin in B contingit in L, & jungatur LE; sumatur autem in LK quodlibet punctum N, a quo ducatur NO perpendicularis ad BL, & ad eandem BL ducatur NP faciens angulum ONP æqualem dato angulo; ad EL vero ducatur $N\alpha$ parallela ipsi TE, & ad BL ducatur $N\beta$ parallela ipsi TS; & propter parallelas $N\alpha$, TE, & $N\beta$, TS, & æquales TE, TS; æquales erunt $N\alpha$, $N\beta$, ut in præmissis ostensum fuit de rectis MV, MZ. Et ex hypothesi est angulus datus ONP major angulo (RES, hoc est, angulo YTS, hoc est, angulo) $ON\beta$; quare & recta NP major erit ipsa $N\beta$ seu $N\alpha$, ideoque circulus centro N, intervallo NP descriptus necessariè occurret rectæ LE duobus in punctis, quorum alterutrum sit Q; & junctæ NQ ducatur parallela EM usque ad LK; centro vero

ro M, intervallo ME, describatur alter circulus, qui transibit per H, quoniam scilicet MK bifariam & ad rectos angulos secat ipsam EH; ideoque occurret rectæ BL; occurrat in F, G, & EF, EG jungantur. Quoniam igitur est (per 35. 3.) rectangulum FBG æquale (ipsi EBH, hoc est, ex constructione) quadrato ex ED; erunt EF, EG, diametri conjugatæ (per Cor. 21. lib. 2.); & ductâ MX perpendiculari ad BL, erit angulus FEG, æqualis angulo FMX; est autem LM ad LN, ut (ME ad NQ, hoc est, ut) MF ad NP, & uterque angulorum MFL, NPL minor est recto; quare æquiangula sunt LMF, LNP triangula (7. 6.), æquales igitur sunt anguli LFM, LPN; ideoque æquales sunt FMX, PNO; ostensus autem est FEG æqualis angulo FMX; quare & FEG æqualis est ipsi PNO, hoc est, angulo dato. *Q. E. D.*

Diametri autem conjugatæ ER, ES, quæ minimum comprehendunt angulum, in hunc modum determinantur. Manentibus jam descriptis, centro L, intervallo LE, describatur circulus, qui rectæ BL occurrat in γ, δ; & quoniam LK bifariam & ad angulos rectos secat rectam EH, transibit circulus per H; quare rectangulum γBδ æquale erit ipsi EBH, hoc est, quadrato ex ED; ideoque (Cor. 21. lib. 2.) erunt Eγ, Eδ diametri conjugatæ; & est angulus γEδ in semicirculo rectus, sunt igitur Eγ, Eδ axes (Cor. 4. 10. lib. 2.) Est autem, ex constructione, recta LE ad rectos angulos ipsi TE diametro circuli RES, quare circulum hunc contingit LE; eundem vero secat ER, ideoque est angulus LER æqualis ipsi LSE in segmento alterno (32. 3.); & propter æquales LE, Lγ, erit angulus LEγ æqualis (angulo LγE, hoc est) duobus angulis LSE, SEγ, quorum LER æqualis ostensus est ipsi LSE; reliquus igitur REγ reliquo SEγ est æqualis: ergo diametri conjugatæ ER, ES, quæ minimum comprehendunt angulum, æquales cum axe Eγ faciunt angulos, & propterea sunt inter se æquales, & parallelæ rectis quæ a vertice axis majoris ad vertices minoris ducuntur, quod etiam in præcedente casu ostensum fuit. Fig. 7.

Et manifestum est posse eodem prorsus modo alias duas diametros conjugatas inveniri, quæ datum comprehendent angulum; ope scilicet alterius puncti q, in quo circulus centro N, intervallo NP, ipsi LE occurrit.

Magnitudo autem diametrorum inveniri potest in hunc modum; a vertice B diametri EB, ducatur ad alterutram EF vel EG, puta

ad EF, recta alteri ipsarum EG parallela; & inter segmentum ipsius EF ductâ abscissum, centroque E adjacens, ipsamque EF, inveniatur media proportionalis, erit hæc semidiameter quæ in EF jacet, (per 17. lib. 2.).

PROP. VII. PROBL.

Datis positione & magnitudine duabus Hyperbolæ diametris conjugatis, alias duas conjugatas invenire quæ faciant angulum dato angulo æqualem; vel, quod eodem redit, rectam Hyperbolam contingentem ducere, quæ cum diametro per contactum faciat angulum dato angulo æqualem.

Fig. 8. Sint AB, CD diametri conjugatæ datæ sibi mutuo occurrentes in centro E, quarum AB sit transversa; & factum puta, sciz. sint EF, EG duæ aliæ diametri conjugatæ, quæ comprehendunt angulum FEG dato angulo æqualem; sit vero EF diameter transversa, & per quodvis in ipsâ punctum H, ducatur recta diametro secundæ EG parallela, quæ asymptotis EK, EL occurrat in K, L punctis: quoniam igitur positione & magnitudine dantur EB, ED, positione dabuntur asymptoti EK, EL, ut in Prop. 54. lib. 3. ostensum fuit; & datum est punctum B in sectione, ideoque si angulus datus FEG rectus fuerit, axes invenientur per Prop. 53. lib. 3. Non autem rectus sit angulus FEG, & circa triangulum EHK describatur circulus cujus centrum sit M, & ductâ MN ad rectos angulos ipsi EK, jungantur MN, ME, & MH; quoniam igitur est KHL parallela diametro secundæ EG, parallela quoque erit rectæ quæ Hyperbolam in vertice F diametri transversæ contingit (Def. 11. lib. 3.), ideoque bifariam secabitur KHL in H, quia & contingens bifariam secatur in F (23. lib. 3.); & est EK bifariam secta in N; (3. 3.) quare juncta HN parallela erit (2. 6.) ipsi EL: datus autem ex hypothesi est angulus HEG, quare datus est EHK, huic autem æqualis est angulus EMN ad centrum, qui proinde datus erit; & est rectus MNE, igitur triangulum MNE specie datur (40. Dat.), ideoque data est ratio ME, seu MH ad MN; datur vero angulus HNE, quia & angulus NEL datus est, & datur MNE, ideoque datur angulus MNH; & data ostensa fuit ratio MH ad MN; ergo (per 44. (Dat.

Dat.) triangulum MNH specie datur; data igitur est ratio HN ad MN, ut & ratio MN ad NE, quare (per 8. Dat.) datur ratio HN ad NE; & angulus HNE datus ostensus est, ergo triangulum HNE specie datur (41. Dat.); datur igitur angulus NEH, ideoque propter EN positione datam, & punctum E, positione dabitur (29. Dat.) recta EH, ideoque & recta EG.

Componetur vero ita: Sint AB, CD diametri conjugatæ positione datæ se mutuo bifariam secantes in E, & inventis asymptotis EK, EL, sumatur in alterutra ipsarum punctum quodvis K; & super EK describatur segmentum circuli, versus ipsam EL, quod capiat angulum dato angulo æqualem; bifariamque sectâ EK in N, ipsi EL ducatur parallela recta per punctum N, occurratque segmento in H; & jungantur EH, KH, & huic ducatur parallela EG; erunt EH, EG diametri conjugatæ quæsitæ. Occurrat enim KH alteri asymptoto in L, & quoniam æquales sunt KN, NE, & est NH parallela ipsi EL, erunt KH, HL æquales; occurrat EH Hyperbolæ in puncto F, (illud autem invenitur eodem prorsus modo quo inventus fuit vertex axis transversi in Prop. 53. lib. 3.), & per F ducatur OFP parallela ipsi KL, occurratque asymptotis in O, P; quoniam igitur æquales ostensæ sunt KH, HL, erunt & OF, FP, æquales; quare OP contingit Hyperbolam in F (23. lib. 3.) & est EG parallela ipsi OF, quia ipsi KH parallela ducta fuit: ergo est EG diameter secunda conjugata transversæ EF (Def. 11. lib. 3.) & est angulus HEG æqualis alterno EHK, hoc est, ex constructione angulo dato. Fig. 8.

PROP. VIII.

Si recta linea Ellipsin vel Hyperbolam contingens occurrat diametro cuicunque Ellipseos, vel diametro transversæ Hyperbolæ; erit rectangulum contentum segmentis diametri inter punctum occursûs & ipsius vertices, ad quadratum ex segmento contingentis inter eundem occursum & contactum; ut quadratum ex semidiametro cui occurrit contingens, ad quadratum ex semidiametro quæ contingenti est parallela.

Fig. 9, 10. Sit Ellipsis vel Hyperbola AC, ipsamque contingat recta AE in A, occurratque diametro CGD quæ sit transversa Hyperbolæ in E, sitque FG semidiameter ipsi AE parallela; erit rectangulum CED ad quadratum ex AE, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

Per contactum ducatur diameter AK, & ad eam ducatur ordinatim ipsi applicata CB, quæ proinde parallela erit contingenti AE; igitur est quadratum ex CG ad quadratum ex EG, ut quadratum ex BG ad quadratum ex AG, & dividendo inversè (a) in Ellipsi, dividendo vero in Hyperbola, est rectangulum CED ad quadratum ex EG, ut (ABK rectangulum ad quadratum ex AG, hoc est, propter sectionem, ut) quadratum ex CB ad quadratum ex FG; ut vero quadratum ex EG ad quadratum ex EA, ita propter parallelas est quadratum ex CG ad quadratum ex CB, ergo ex æquo perturbatè est rectangulum CED ad quadratum ex EA, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

PROP. IX.

Si recta Hyperbolam contingens occurrat diametro secundæ; erit quadratum ex segmento diametri inter occursum & centrum simul cum quadrato ex semidiametro, ad quadratum ex segmento contingentis inter eundem occursum & contactum; ut quadratum ex semidiametro cui occurrit contingens, ad quadratum ex semidiametro quæ contingenti est parallela.

Fig. 11. Sint A, K Hyperbolæ oppositæ, unamque ex ipsis contingat recta AE in A, occurratque diametro secundæ CGD in E, sitque FG semidiameter parallela ipsi AE; erunt quadrata ex EG, CG simul ad quadratum ex EA, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

Per

(a) Divisio inversa rationis est sumptio excessus quo consequens superat antecedentem, ad ipsam consequentem; si autem quatuor magnitudines sint proportionales, & divisæ inversè proportionales erunt.

Sint enim A, A & B simul, C, C & D simul proportionales; erit invertendo, A & B simul ad A, ut C & D simul ad C; & convertendo, A & B simul ad B, ut C & D simul ad D; & iterum invertendo, erit B ad A & B simul, ut D ad C & D simul: liceat igitur hoc termino uti evitandæ prolixitatis gratia.

Per contactum ducatur diameter AK, & ad eam ducatur ordinatim ipsi applicatis parallela CB, quæ proinde erit parallela contingenti AE, & igitur (propter parallelas & per 22. 6.) est quadratum ex CG ad quadratum ex GE, ut quadratum ex BG ad quadratum ex GA; &, componendo, est summa quadratorum ex CG, GE ad quadratum ex GE, ut (summa quadratorum ex BG, GA ad quadratum ex GA, hoc est, per Prop. 41. lib. 3. ut) quadratum ex CB ad quadratum ex FG; ut vero quadratum ex GE ad quadratum ex EA, ita propter parallelas est quadratum ex CG, ad quadratum ex CB; ergo ex æquo perturbatè est summa quadratorum ex CG, GE ad quadratum ex EA, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

Cor. ad duas præcedentes. Si a puncto ducantur duæ rectæ, Ellipsin, Hyperbolam vel Hyperbolas oppositas contingentes, erunt quadrata ex ipsis ad se invicem ut quadrata ex semidiametris iisdem parallelis.

Sint EA, EH contingentes, & FG, GL semidiametri ipsis parallelæ, & per punctum E ducatur diameter ECD: est igitur rectangulum CED, vel summa quadratorum ex CG, GE, ad quadratum ex EA, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG; & quadratum ex EH ad rectangulum CED, vel summam quadratorum ex CG, GE, ut quadratum ex GL ad quadratum ex CG: ergo ex æquo est quadratum ex EH ad quadratum ex EA, ut quadratum ex GL ad quadratum ex FG. Fig. 9, 10, 11.

L E M M A.

Si inter duas rectas CD, FH, sibi mutuo occurrentes in G, ducantur parallelæ quotcunque rectæ EO, VS, PF, CL, QM; erunt triangula EOG, VSG, &c. inter se, ut quadrata ex ipsorum lateribus homologis; & summæ vel excessus triangulorum, vt summæ vel excessus quadratorum ex lateribus. Ex. gr. Fig. 12.

Cas. 1. Sint triangula EOG, CLG, & ipsi CG ponatur æqualis GD: &, quoniam est triangulum EOG ad triangulum CLG, ut quadratum ex EG ad quadratum ex CG; erit, compo-

nendo,

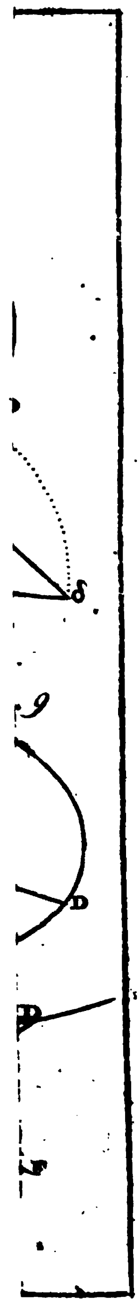
nendo, summa ipsorum EOG, CLG ad CLG, ut summa quadratorum ex EG, CG ad quadratum ex CG; & similiter, dividendo, est trapezium EOLC ad triangulum CLG, ut excessus quadrati ex EG supra quadratum ex CG, hoc est, (per 5 aut 6. 2.) rectangulum CED ad quadratum ex CG.

Cas. 2. Sint rursus triangula PFG, CLG, QMG, sitque GH æqualis ipsi GF, & GN ipsi GM; erit excessus ipsorum PFG, QMG ad excessum ipsorum PFG, CLG, ut excessus quadratorum ex FG, MG ad excessum quadratorum ex FG, LG; hoc est, erit trapezium PFMQ ad trapezium PFLC, ut rectangulum FMH ad rectangulum FLH (5 aut 6. 2.) Nam per Cas. 1. est trapezium PFMQ ad triangulum QMG, ut rectangulum FMH ad quadratum ex MG; &, permutando, ut PFMQ ad rectangulum FMH, ita triangulum QMG ad quadratum ex MG: & eâdem ratione ostendetur esse PFLC ad rectangulum FLH, ut triangulum CLG ad quadratum ex LG, hoc est, ut QMG ad quadratum ex MG: ergo est trapezium PFMQ ad rectangulum FMH, ut trapezium PFLC ad rectangulum FLH; quare, permutando, est PFMQ ad PFLC, ut rectangulum FMH ad rectangulum FLH. Et eodem prorsus modo ostendetur summam ipsorum PFG, QMG esse ad summam ipsorum PFG, CLG, ut summa quadratorum ex FG, MG ad summam quadratorum ex FG, LG. Eâdemque ratione ostendetur esse trapezium PFMQ ad summam triangulorum PFG, CLG, ut rectangulum FMH ad summam quadratorum ex FG, LG.

Cas. 3. Denique, Sint triangula EOG, VSG, PFG, sitque GH æqualis ipsi GF; erit triangulum EOG, simul cum trapezio PFSV, ad triangulum PFG, ut quadratum ex OG, simul cum rectangulo FSH, ad quadratum ex FG. Nam est EOG ad quadratum ex OG, ut (PFG ad quadratum ex FG, hoc est, per Cas. 1. ut) trapezium PFSV ad rectangulum FSH; quare (per 12. 5.) est EOG, simul cum PFSV, ad quadratum ex OG, simul cum rectangulo FSH, ut (EOG ad quadratum ex OG, hoc est, ut) PFG ad quadratum ex FG: ergo permutando,

PROP. X.

Si recta linea Ellipsin, Hyperbolam vel Hyperbolas oppositas secet, occurratque diametro cuicunque Ellipseos, vel



vel diametro transversæ Hyperbolæ; erit rectangulum contentum segmentis diametri inter punctum occursûs & ipsius vertices, ad rectangulum contentum segmentis rectæ lineæ, inter eundem occursum & intersectiones rectæ lineæ & sectionis, ut quadratum ex semidiametro cui occurrit recta, ad quadratum ex semidiametro quæ eidem est parallela.

Cas. 1. Quando recta occurrit Ellipsi vel Hyperbolis oppositis.
Occurrat recta AB sectioni in A, B, & diametro CGD in E, sitque FG semidiameter ipsi AB parallela; erit rectangulum CED ad rectangulum AEB, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG. Fig. 13, 14, 15, 16.

Ducantur CL, AM, BN, EO & FP parallelæ ordinatim applicatis diametro FGH, occurratque AM ipsi CG in Q: & quoniam æquales sunt AM, BN, æqualia erunt segmenta MG, NG inter ipsas & centrum (Cor. 4. 15. lib. 2. & Cor. 1. 31. lib. 3.); &, propter sectionem, erit quadratum ex EO, seu AM, ad quadratum ex CL, ut rectangulum FMH ad rectangulum FLH: ut autem quadratum ex EO ad quadratum ex CL, ita est triangulum EOG ad triangulum CLG; & ut rectangulum FMH ad rectangulum FLH, ita est, per Lemma, trapezium PFMQ ad trapezium PFLC; quare est triangulum EOG ad triangulum CLG, ut trapezium PFMQ ad trapezium PFLC: &, dividendo, quando OG major est LG, dividendo vero inversè, quando OG minor est LG, erit trapezium EOLC ad triangulum CLG, ut trapezium QMLC ad trapezium PFLC. Et in Ellipsi per 12. 5. in Hyperbola vero per 19. 5. erit trapezium EOLC ad triangulum CLG, ut trapezium EOMQ ad triangulum PFG: quoniam vero æquales sunt CG, GD, erit, per Lemma, trapezium EOLC ad triangulum CLG, ut rectangulum CED ad quadratum ex CG; &, per idem Lemma, propter æquales MG, GN, erit trapezium EOMQ ad triangulum PFG, ut rectangulum MON ad quadratum ex FG: ergo est rectangulum CED ad quadratum ex CG, ut rectangulum MON, seu AEB, ad quadratum ex FG; &, permutando, est rectangulum CED ad rectangulum AEB, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

Cas. 2. Quando recta AB occurrit uni Hyperbolarum oppositarum.

Iisdem

Fig. 17, 18. Iisdem constructis, erunt MG, NG æquales; &, quoniam in hoc casu est FGH diameter secunda, erit quadratum ex EO, seu AM, ad quadratum ex CL, ut summa quadratorum ex MG, FG ad summam quadratorum ex LG, FG; & igitur, per Lemma, erit triangulum EOG ad triangulum CLG, ut summa triangulorum QMG, PFG ad summam triangulorum CLG, PFG; &, dividendo, quando OG major est LG, dividendo vero inversè, quando OG minor est LG, erit trapezium EOLC ad triangulum CLG, ut trapezium QMLC ad summam triangulorum CLG, PFG: quare, per 19. 5. est trapezium EOLC ad triangulum CLG, ut trapezium EOMQ ad triangulum PFG; ergo, per Lemma, propter æquales CG, GD & FG, GH, est rectangulum CED ad quadratum ex CG, ut rectangulum MON, seu AEB, ad quadratum ex FG; &, permutando, est CED ad AEB, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

PROP. XI.

Si recta linea Hyperbolam vel oppositas Hyperbolas secet, occurratque ipsarum diametro secundæ; erit quadratum ex segmento diametri inter punctum occursûs & centrum, simul cum quadrato ex semidiametro, ad rectangulum contentum segmentis rectæ lineæ inter eundem occursum & intersectiones ipsius & Hyperbolæ vel Hyperbolarum, ut quadratum ex semidiametro cui occurrit recta ad quadratum ex semidiametro quæ eidem est parallela.

Cas. 1. Quando recta occurrit Hyperbolis oppositis.

Fig. 19. Occurrat recta AB Hyperbolis in A, B, & diametro secundæ CD in E, sitque FG semidiameter ipsi AB parallela, quæ idcirco erit diameter transversa; erit quadratum ex EG, simul cum quadrato ex CG, ad rectangulum AEB, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG. Iisdem enim ut in præcedente constructis, erunt MG, NG æquales; & quoniam est AM ordinatim applicata diametro transversæ FH, & ad eandem ducta est a termino diametri secundæ CD recta CL ipsi AM parallela, erit, per Cor. Prop. 41. lib. 3. quadratum ex AM, seu EO, ad quadratum ex CL, ut rectangulum


H
D
B
A
B
B

gulum FMH ad summam quadratorum ex LG, FG; & igitur, per Lemma, erit triangulum EOG ad triangulum CLG, ut trapezium PFMQ ad triangula CLG, PFG simul: quare, componendo, erunt triangula EOG, CLG simul ad triangulum CLG, ut triangula CLG, QMG simul ad triangula CLG, PFG simul; &, per 19. 5. erunt triangula EOG, CLG simul ad triangulum CLG, ut trapezium EOMQ ad triangulum PFG; ergo, per Lemma, est summa quadratorum ex EG, CG ad quadratum ex CG, ut rectangulum MON, seu AEB, ad quadratum ex FG; &, permutando, est summa quadratorum ex EG, CG ad rectangulum AEB, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

Cas. 2. Quando recta occurrit uni Hyperbolarum.

Occurrat recta AB Hyperbolæ in A, B punctis, & diametro secundæ CD in E, sitque FG semidiameter ipsi AB parallela, quæ propterea erit diameter recta; &, iisdem constructis, erunt MG, NG æquales: &, quoniam est AM ordinatim applicata diametro rectæ FH, & ad eandem ducta est a termino diametri secundæ CD recta CL ipsi AB parallela, erit, per Cor. Prop. 41. lib. 3. quadratum ex AM, seu EO, ad quadratum ex CL, ut summa quadratorum ex MG, FG ad rectangulum FLH; & igitur, per Lemma, est triangulum EOG ad triangulum CLG, ut summa triangulorum QMG, PFG ad trapezium PFLC: quare, componendo, est summa triangulorum EOG, CLG ad triangulum CLG, ut summa triangulorum QMG, CLG ad trapezium PFLC; &, per 19. 5. est summa triangulorum EOG, CLG ad triangulum CLG, ut trapezium EOMQ ad triangulum PFG; ergo, per Lemma, est summa quadratorum ex EG, CG ad quadratum ex CG, ut rectangulum MON, seu AEB, ad quadratum ex FG: & permutando. FIG. 20.

DEFINITIO.

SI per punctum in diametro Ellipseos, vel diametro transversa Hyperbolæ, ducatur recta parallela ordinatim ipsi applicatis, spatium ad quod rectangulum contentum segmentis diametri inter punctum & vertices ejus, eandem habet rationem quam habet quadratum ex semidiametro ad quadratum ex semidiametro quæ ipsi conjugata est, vocetur *Spatium proportionale conveniens rectæ.*

In Parabola vero, spatium ad quod rectangulum contentum segmento

mento diametri inter punctum & verticem, ejusdemque diametri latere recto, rationem habet æqualis ad æquale, similiter vocetur *Spatium proportionale conveniens rectæ.* Manifestum autem est spatium hoc in omnibus sectionibus æquale esse quadrato ex segmento ordinatim applicatæ inter punctum & sectionem quando punctum cadit intra sectionem. Et similiter, quando occasio fuerit, vocetur quadratum ex segmento rectæ, quæ ordinatim applicatur diametro secundæ Hyperbolæ inter diametrum & sectionem, *Spatium proportionale conveniens rectæ.*

PROP. XII.

Si recta linea Ellipsin vel oppositas Hyperbolas nec contingat nec secet, occurrat vero diametro Ellipseos cuicunque, vel diametro transversæ Hyperbolæ; erit rectangulum contentum segmentis diametri inter punctum occursûs & vertices ejus, ad quadratum ex segmento rectæ inter idem punctnm, & punctum quo rectæ occurrit diameter cui ordinatim applicatæ sunt rectæ huic parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem rectæ convenit; ut quadratum ex semidiametro primo nominata, ad quadratum ex semidiametro quæ rectæ parallela est.

Cas. I. Quando recta occurrit diametro Ellipseos.

Fig. 21. Occurrat recta AB diametro CGD Ellipseos in E, diametro vero TGK, cui ordinatim applicatæ sunt ipsi AB parallelæ, occurrat in R, sitque diameter FGH parallela eidem AB, & idcirco ipsi KT conjugata; erit rectangulum CED ad quadratum ex ER, simul cum spatio proportionali quod rectæ AB convenit, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

Fiat, ut GK ad GF, ita GR ad quartam GS: igitur, quoniam est quadratum ex GR ad quadratum ex GS, ut quadratum ex GK ad quadratum ex GF, erit & reliquum, sciz. rectangulum KRT, ad reliquum rectangulum FSH, ut quadratum ex GK ad quadratum ex GF; & igitur est rectangulum FSH spatium proportionale conveniens rectæ AB. Ducantur CL, EO, FP, SV parallelæ ipsi GK:

GK : &, quoniam est quadratum ex GR, seu EO, ad quadratum ex GS, ut (quadratum ex GK ad quadratum ex GF, hoc est, propter sectionem, ut) quadratum ex CL ad rectangulum FLH ; erit, permutando, quadratum ex EO ad quadratum ex CL, ut quadratum ex GS ad rectangulum FLH : est igitur, per Lemma, propter æquales FG, GH, triangulum EOG ad triangulum CLG, ut triangulum VSG ad trapezium PFLC ; & igitur, per 12. 5. est triangulum EOG ad triangulum CLG, ut triangula EOG, VSG simul ad triangulum PFG : &, dividendo, est trapezium EOLC ad triangulum CLG, ut triangulum EOG & trapezium PFSV simul ad triangulum PFG ; &, quoniam æquales sunt CG, GD, ut & FG, GH, erit, per Lemma, rectangulum CED ad quadratum ex GC, ut quadratum ex OG, seu ER, simul cum rectangulo FSH, ad quadratum ex FG : &, permutando, est rectangulum CED ad quadratum ex ER simul cum rectangulo FSH, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

Cas. 2. Quando recta AB occurrit diametro transversæ Hyperbolæ. Iisdem constructis, ostendetur, ut in præcedente casu, esse quadratum ex EO ad quadratum ex GS, ut quadratum ex GK ad quadratum ex GF, hoc est, propter sectionem, ut quadratum ex CL ad summam quadratorum ex LG, FG ; (nam, quoniam ex hypothesi recta AB Hyperbolis non occurrit, erit FG, quæ ipsi parallela est, diameter secunda :) &, permutando, est quadratum ex EO ad quadratum ex CL, ut quadratum ex GS ad summam quadratorum ex LG, FG ; quare, per Lemma, est triangulum EOG ad triangulum CLG, ut triangulum VSG ad summam triangulorum CLG, PFG ; &, per 19. 5. est triangulum EOG ad triangulum CLG, ut trapezium EOSV ad triangulum PFG : igitur, dividendo inversè, est trapezium EOLC ad triangulum CLG, ut triangulum EOG & trapezium PFSV simul ad triangulum PFG ; ergo, per Lemma, est rectangulum CED ad quadratum ex CG, ut quadratum ex OG, seu ER, & rectangulum FSH simul, ad quadratum ex FG : & permutando. Fig. 22.

PROP. XIII.

Si recta linea oppositas Hyperbolas nec contingat nec secet, occurrat vero ipsarum diametro secundæ ; erit quadratum

dratum ex segmento diametri inter punctum occursûs & centrum, simul cum quadrato ex semidiametro, ad quadratum ex segmento rectæ inter idem punctum occursûs & illud quo rectæ occurrit diameter cui ordinatim applicatæ sunt rectæ huic parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem rectæ convenit; ut quadratum ex semidiametro primo nominata, ad quadratum ex semidiametro quæ rectæ est parallela.

FIG. 23. Occurrat recta AB diametro secundæ Hyperbolæ, scil. ipsi CGD, in E; diametro vero TGK, cui ordinatim applicatæ sunt ipsi AB parallelæ, occurrat in R; sitque FGH diameter parallela eidem AB, & idcirco ipsi KT conjugata: erit quadratum ex EG, simul cum quadrato ex CG, ad quadratum ex ER simul cum spatio proportionali quod rectæ AB convenit, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

Iisdem ut in præcedente constructis, ostendetur, ut in ea, esse quadratum ex EO ad quadratum ex GS, ut quadratum ex GK ad quadratum ex GF, hoc est, propter sectionem, ut quadratum ex CL ad rectangulum FLH: &, permutando, est quadratum ex EO ad quadratum ex CL, ut quadratum ex GS ad rectangulum FLH; quare, per Lemma, est triangulum EOG ad triangulum CLG, ut triangulum VSG ad trapezium PFLC: &, componendo, est summa triangulorum EOG, CLG ad triangulum CLG, ut triangulum VSG, simul cum trapezio PFLC, ad trapezium PFLC; &, per 19. 5. est summa triangulorum EOG, CLG ad triangulum CLG, ut triangulum EOG simul cum trapezio PFSV ad triangulum PFG; ergo, per Lemma, est quadratum ex EG, simul cum quadrato ex CG, ad quadratum ex CG; ut quadratum ex OG, seu ER, & rectangulum FSH simul, ad quadratum ex FG: &, permutando, est summa quadratorum ex EG, CG ad quadratum ex ER & rectangulum FSH simul, ut quadratum ex CG ad quadratum ex FG.

PROP. XIV.

Si duæ rectæ sibi invicem occurrant, sive una, sive utraque, sive neutra, Ellipsin, vel Hyperbolam vel oppositas

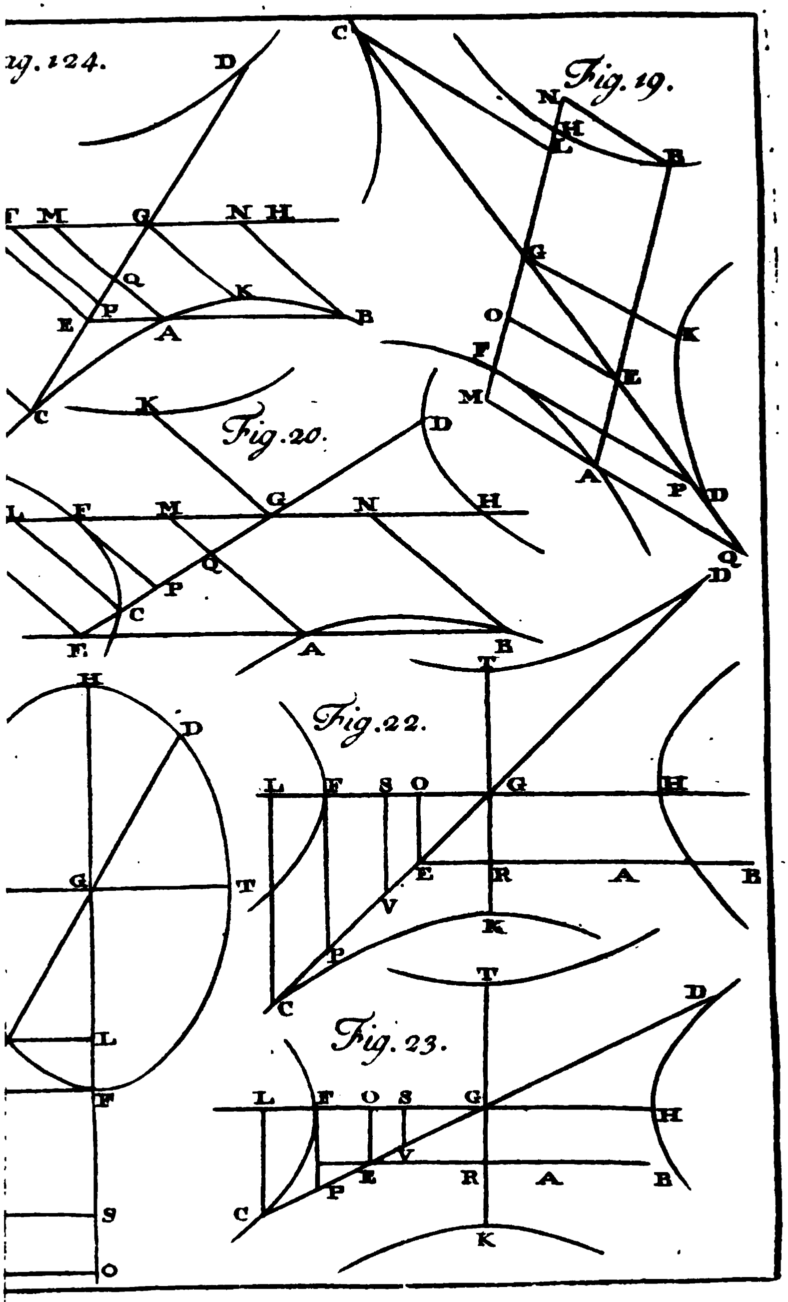


Fig. 124.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 22.

Fig. 23.

sitas Hyperbolas secet, vel contingat, vel Ellipsi & Hyperbolis oppositis non occurrat; erit rectangulum contentum segmentis primæ inter occursum rectarum & puncta quibus sectioni occurrit: vel, si contingat sectionem, erit quadratum ex segmento ipsius inter occursum rectarum & contactum: vel denique, si non occurrat Ellipsi, vel Hyperbolæ, vel sectionibus oppositis, erit quadratum ex segmento ipsius inter occursum rectarum & punctum quo primæ rectæ occurrit diameter cui ordinatim applicatæ sunt ipsi parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem primæ rectæ convenit; ad rectangulum, vel ad quadratum, vel ad quadratum & spatium proportionale similiter ad secundam rectam relata; prout ea secat vel contingit sectionem, vel ei non occurrit; ut quadratum ex semidiametro quæ primæ rectæ est parallela, ad quadratum ex semidiametro quæ secundæ est parallela.

OCcurrant sibi mutuo rectæ AB, AD in A, & sectioni in punctis B, C & D, E; & per A ducatur diameter KAFL, sitque primo diameter quæcunque Ellipseos vel transversa Hyperbolæ; & ducatur FG semidiameter ipsi BC parallela, & FH semidiameter ipsi DE parallela; erit rectangulum BAC ad rectangulum DAE, ut quadratum ex GF ad quadratum ex HF. FIG. 24, 25, 26.

Nam, per 10. huj. est rectangulum KAL ad rectangulum BAC, ut quadratum ex KF ad quadratum ex GF; &, invertendo, est rectangulum BAC ad rectangulum KAL, ut quadratum ex GF ad quadratum ex KF; ut vero KAL ad DAE, ita per 10. hujus est quadratum ex KF ad quadratum ex HF; ergo ex æquo est rectangulum BAC ad rectangulum DAE, ut quadratum ex GF ad quadratum ex HF.

Si vero KAFL fuerit diameter secunda Hyperbolæ, erit, per Prop. 11. hujus, quadratum ex AF simul cum quadrato ex KF, ad rectangulum BAC; ut quadratum ex KF, ad quadratum ex GF, & invertendo: ut vero quadratum ex AF simul cum quadrato ex KF, ad rectangulum DAE, ita est quadratum ex KF ad quadratum ex HF; FIG. 27.

HF, ergo ex æquo est rectangulum BAC ad rectangulum DAE, ut quadratum ex GF ad quadratum ex HF.

FIG. 28. Similiter si una rectarum secet sectionem, ut ABC, altera vero contingat, ut AD, ostendetur ope Propositionis 10. vel 11. & Prop. 8. vel 9. prout diameter AF fuerit transversa vel secunda Hyperbolæ; esse rectangulum BAC ad quadratum ex AD, ut quadratum ex GF ad quadratum ex HF.

FIG. 29, 30. Si vero una rectarum secet sectionem, ut ABC, altera vero AD ipsi non occurrat, ad AD ducatur diameter FS cui ordinatim applicatæ parallelæ sunt ipsi AD, sitque X spatium proportionale rectæ AD conveniens; cæteris manentibus, erit rectangulum BAC ad quadratum ex AS simul cum spatio X, ut quadratum ex GF ad quadratum ex HF. Demonstratur ex Propp. 10. vel 11. & 12. & 13. eodem modo quo præcedens casus.

FIG. 31. Et si neutra rectarum sectioni occurrat, ut AB, AD, sintque FS, FT diametri quibus ordinatim applicatæ sunt ipsis AB, AD parallelæ; & spatium proportionale rectæ AS conveniens sit X, rectæ vero AT conveniens sit Y; erit quadratum ex AS simul cum spatio X, ad quadratum ex AT simul cum Y, ut quadratum ex GF ad quadratum ex HF, per Prop. 12. vel 13. & sic in reliquis casibus.

FIG. 32. Si rectæ sibi mutuo occurrunt super unam asymptoton, rectangula contenta earundem segmentis inter occursum & intersectiones ipsarum & sectionis, æqualia sunt quadratis ex semidiametris quæ ipsis parallelæ sunt (Cor. 4. 23. lib. 3.); & si una ipsarum contingat Hyperbolam, segmentum ejus inter contactum & asymptoton æquale est semidiametro secundæ quæ rectæ parallela est; si vero una vel utraque ipsarum sectionibus non occurrat, quadratum ex segmento ejus inter asymptoton & punctum quo ipsi occurrit diameter cui ordinatim applicatæ sunt ipsi rectæ parallelæ, simul cum spatio proportionali quod rectæ convenit, æquale est quadrato ex semidiametro quæ rectæ parallela est.

Sit enim Hyperbola cujus asymptoti AC, BC, & per punctum in una ipsarum D, ducatur recta DE Hyperbolis non occurrens, diametro vero FG cui ordinatim applicatis parallela est DE occurrat in H, sitque CL semidiameter ipsi CF conjugata, quæ proinde æqualis & parallela erit (Def. 11. lib. 3.) rectæ FK, quæ contingit Hyperbolam in F & terminatur ad asymptoton, erit quadratum ex DH simul cum spatio proportionali S quod rectæ DE convenit, æquale

quale quadrato ex CL seu FK; nam est quadratum ex CF ad quadratum ex FK, ut quadratum ex CH ad quadratum ex HD; & per 19. 5. est quadratum ex CF ad quadratum ex FK, ut rectangulum FHG ad excessum quadrati ex FK supra quadratum ex HD; & igitur excessus hic æqualis est (Def. hujus) spatio proportionali S; quare quadratum ex FK seu CL æquale est quadrato ex HD & spatio S simul. Ergo & in his casibus constat Propositio: ex. gr.

In fig. 32. est rectangulum MDN ad quadratum ex DH simul cum spatio proportionali quod rectæ DE convenit, ut quadratum ex CO ad quadratum ex CL; est enim rectangulum MDN æquale quadrato ex CO, &, ut jam ostensum est, quadratum ex DH, simul cum spatio proportionali quod ipsi DE convenit, æquale quadrato ex CL.

PROP. XV.

Iisdem manentibus, si alterutri rectarum AB, AD ducatur parallela MN, alteri AD occurrens in O; prout MN secat vel contingit sectionem, vel ipsi non occurrit, eadem sequentur de rectis AD, MN & puncto occursus O, quæ ostensa sunt de rectis AD, AB & ipsarum concursu A; & igitur rectangula contenta segmentis rectarum AB, AD puncto A adjacentibus, vel quadrata ex contingentibus, vel quadrata & spatia proportionalia, sunt ad se invicem ut rectangula, &c. contenta segmentis rectarum puncto O adjacentibus: ex gr. Fig. 24, 25, 29, 30, 31.

In fig. 24. est rectangulum BAC ad rectangulum DAE, ut rectangulum MON ad rectangulum DOE: in fig. 25. est rectangulum BAC ad rectangulum DAE, ut quadratum ex MO ad rectangulum DOE: in fig. 29, 30. est rectangulum BAC ad quadratum ex AS simul cum spatio proportionali quod rectæ DE convenit, ut rectangulum MON ad quadratum ex OS simul cum spatio proportionali quod eidem DE convenit: in fig. 31. est quadratum ex AS simul cum spatio proportionali quod rectæ BC convenit, ad quadratum ex AT simul cum spatio proportionali quod rectæ DE

con-

convenit; ut rectangulum MON; ad quadratum ex OT simul cum spatio proportionali quod eidem DE convenit: & sic in reliquis casibus.

Et si ipsis AB, AD ducantur duæ parallelæ MN, PQ sibi mutuo occurrentes in R, erunt rectangula, quadrata, &c. ex rectis puncto A adjacentibus, inter se, ut rectangula, quadrata, &c. ex rectis puncto R adjacentibus, ut manifestum est ex præcedente: ex. gr. in fig. 24. est rectangulum BAC ad rectangulum DAE, ut rectangulum MRN ad rectangulum PRQ; in fig. 25, est rectangulum BAC, ad rectangulum DAE, ut quadratum ex MR ad quadratum ex RS simul cum spatio proportionali quod rectæ PQ convenit; in fig. 29. est rectangulum BAC ad quadratum ex AS simul cum spatio proportionali quod rectæ DE convenit, ut rectangulum MRN ad quadratum ex RT simul cum spatio proportionali quod rectæ PQ convenit; in fig. 30. est rectangulum BAC ad quadratum ex AS simul cum spatio proportionali quod rectæ DE convenit, ut rectangulum MRN ad rectangulum PRQ; in fig. 31. est quadratum ex AS simul cum spatio proportionali quod rectæ BC convenit, ad quadratum ex AT simul cum spatio proportionali quod rectæ DE convenit, ut rectangulum MRN, ad rectangulum PRQ: & sic in reliquis casibus.

PROP. XVI.

Si duæ rectæ lineæ Ellipsin, Hyperbolam vel oppositas Hyperbolas contingant, & uni ipsarum occurrat diameter quæcunque Ellipseos vel diameter transversa Hyperbolæ, & per punctum occursûs ducatur recta alteri contingenti parallela; erit rectangulum contentum segmentis diametri inter punctum occursûs & ipsius vertices, ad quadratum ex segmento rectæ parallelæ inter idem punctum & rectam contactus conjungentem; ut quadratum ex semidiametro cui occurrit recta parallela, ad quadratum ex semidiametro quæ eidem est parallela.

Fig. 33, 34, 35. Contingant AB, AC sectionem in punctis B, C, & ipsi AC occurrat diameter HGF in puncto D per quod ducta DE ipsi

AB

AB parallela, occurrat junctæ CB in E; sitque GK semidiameter ipsi DE parallela: erit rectangulum FDH ad quadratum ex DE, ut quadratum ex FG ad quadratum ex KG.

Sit LG semidiameter ipsi AC parallela, & (per Prop. 8. huj.) erit rectangulum FDH ad quadratum ex DC, ut quadratum ex FG ad quadratum ex LG; est vero quadratum ex DC ad quadratum ex DE, ut (quadratum ex AC ad quadratum ex AB, hoc est, [per Cor. 4. huj.] ut) quadratum ex LG ad quadratum ex KG; ergo ex æquo est rectangulum FDH ad quadratum ex DE, ut quadratum ex FG ad quadratum ex KG.

PROP. XVII.

Occurrat jam diameter secunda Hyperbolæ, viz. FGH contingenti AC in D, cæteris ut in præcedente manentibus: erit quadratum ex DG simul cum quadrato ex FG, ad quadratum ex DE; ut quadratum ex FG, ad quadratum ex KG. Fig. 36.

Demonstratur ex propositione 9. & Corollario ejusdem, eodem prorsus modo quo præcedens ex Propositione 8. & eodem Corollario. Est sciz. quadratum ex FG & quadratum ex DG simul ad quadratum ex DC, ut quadratum ex FG ad quadratum ex LG; est vero quadratum ex DC ad quadratum ex DE, ut (quadratum ex AC ad quadratum ex AB, hoc est, ut) quadratum ex LG ad quadratum ex KG; ergo ex æquo est quadratum ex FG & quadratum ex DG simul ad quadratum ex DE, ut quadratum ex FG ad quadratum ex KG.

PROP. XVIII.

Si a puncto in recta Ellipsin vel Hyperbolam contingente ducatur recta alii contingenti parallela, ab eodem vero puncto alia recta utcunque, prout secunda hæc recta sectionem secat vel contingit, vel ipsi non occurrit; erit rectangulum contentum segmentis ejus inter punctum a quo ducta est recta, & puncta quibus sectioni occurrit;

vel, si contingat, erit quadratum ex segmento contingentis inter punctum & contactum; vel, si non occurrat, erit quadratum ex segmento ejus inter punctum a quo ducta est recta, & punctum quo ipsi occurrit diameter cui ordinatim applicatæ sunt rectæ huic parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem convenit; ad quadratum ex segmento rectæ primæ inter prædictum punctum a quo ducta est, & rectam quæ per contactus contingentium transit: ut quadratum ex semidiametro quæ secundæ rectæ parallela est; ad quadratum ex semidiametro quæ primæ rectæ parallela est,

DEmonstratur ex Propp. 16. vel 17; & 10. vel 11; 8. vel 9; 12. vel 13. eodem modo quo Propositio 14.

Cor. Et ex hac 18. & ex ipsâ & 14. junctim similia sequuntur iis quæ in Prop. 15. ostensa fuerunt ex 14.

PROP. XIX.

Si recta linea parabolam contingat, occurratque ipsius diametro; erit rectangulum contentum segmento diametri inter verticem ejus & contingentem, & latere recto diametri quæ per contactum ducitur, æquale quadrato ex segmento contingentis inter contactum & punctum quo diametro occurrit.

Fig. 37. COntingat recta AB parabolam in B, occurratque diametro CD in A, & completo parallelogrammo BADE, erit BE diameter, & DE ipsi ordinatim applicata, ergo (per Prop. 13. lib. 1.) erit rectangulum contentum abscissâ BE & latere recto diametri BE, æquale quadrato ex DE, hoc est, erit rectangulum contentum AD & latere recto diametri BE, æquale quadrato ex AB.

Cor. Si a puncto ducantur duæ rectæ Parabolam contingentes,

erunt

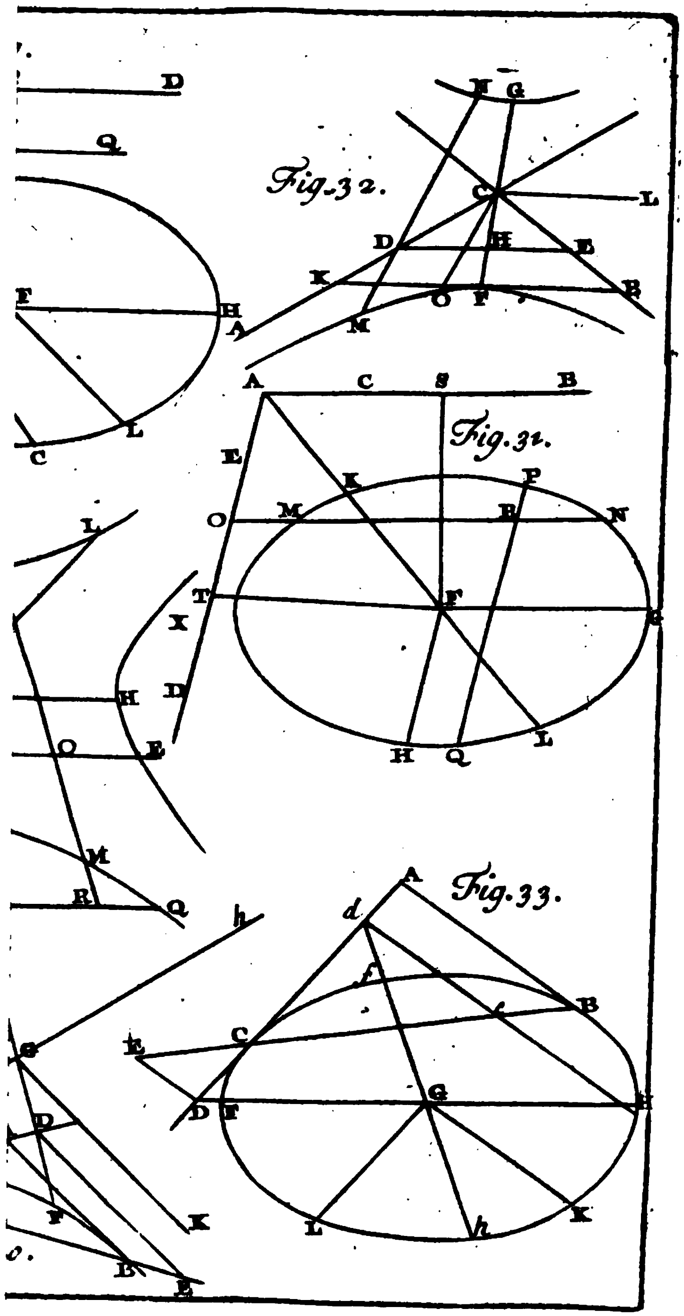


Fig. 32.

Fig. 31.

Fig. 33.

erunt quadrata ex ipsis ad se invicem, ut latera recta diametrorum quæ per contactus transeunt.

Sint AB, AF contingentes, & AD diameter, & per Propositionem hanc, erit quadratum ex AB æquale rectangulo contento AD & latere recto diametri per B, & quadratum ex AF æquale rectangulo contento eâdem AD & latere recto diametri per F, unde constat Corollarium (per. 1. 6.)

PROP. XX.

Si recta linea Parabolam secet occurratque diametro; erit rectangulum contentum segmento diametri inter occursum ipsiusque verticem & latere recto diametri rectæ secantis, æquale rectangulo contento segmentis ejusdem rectæ inter punctum quo diametro occurrit, & puncta quibus sectioni occurrit.

Recta AB Parabolæ occurrat in A, B punctis, diametro vero CD in E; erit rectangulum contentum recta DE & latere recto diametri ipsius AB æquale rectangulo AEB. Fig. 38.

Ducatur enim FG diameter ipsius AB, cui ad rectos angulos ducatur FH æqualis lateri recto diametri FG, & compleatur parallelogrammum GFHK, ducanturque DL, LM ipsis BG, GK parallelæ; quoniam igitur propter Parabolam est quadratum ex BG æquale rectangulo GH, quadratum vero ex DL æquale rectangulo LH; erit excessus quadratorum ex BG, DL æquale excessui ipsorum GH, LH, hoc est, rectangulo LK; est autem excessus quadratorum ex BG, DL, hoc est, ex BG, EG, æqualis rectangulo AEB (5. aut 6. 2.); ergo est AEB rectangulum æquale ipsi LK, hoc est, rectangulo contento LG, seu DE, & latere recto ipsius FG diametri sciz. rectæ AB.

PROP. XXI.

Si recta linea Parabolam nec contingat nec secet, occurrat vero diametro; erit rectangulum contentum seg-

mento diametri inter punctum occursûs & verticem ejus, latereque recto diametri cui ordinatim applicatæ parallelæ sunt ipsi rectæ; æquale quadrato ex segmento rectæ inter has diametros, simul cum rectangulo contento segmento ultimo nominatæ diametri inter verticem ejus & rectam, ejusdemque diametri latere recto; hoc est, simul cum spatio proportionali quod rectæ convenit.

Fig. 39. Occurrat recta AB diametro CD in E, diametro vero FG cui ordinatim applicatæ sunt ipsi AB parallelæ occurrat in G; sitque recta K æqualis lateri recto ipsius FG; erit rectangulum DE in K æquale quadrato ex EG simul cum rectangulo FG in K.

Per F verticem diametri FG ducatur recta FH contingens Parabolam, quæ proinde parallela erit ipsi AB, occurratque diametro DE in H; & erit rectangulum DE in K æquale rectangulis DH in K, & HE in K; est vero rectangulum DH in K æquale quadrato ex FH (19. huj.) seu EG, quare est DE in K æquale quadrato ex EG & rectangulo HE in K, seu FG in K.

Cor. 1. ad tres præcedentes. Si duæ diametri occurrant rectæ Parabolâ terminatæ, erunt rectangula contenta segmentis rectæ inter diametros & puncta quibus recta Parabolæ occurrit, ad se invicem, ut segmenta diametrorum inter rectam & ipsarum vertices (per 20. huj. & 1. 6.).

Et, si recta contingat Parabolam, erunt quadrata ex segmentis ipsius inter diametros & contactum, ut segmenta diametrorum inter rectam & ipsarum vertices (per 19. huj. & 1. 6.)

Et, si recta Parabolæ non occurrat, erunt quadrata ex segmentis ipsius inter diametros & diametrum illam cui ordinatim applicatæ sunt huic rectæ parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem rectæ convenit; ut segmenta diametrorum inter rectam & ipsarum vertices (per hanc 21. & 1. 6.)

Cor. 2. Eadem sequuntur si diameter quævis occurrat duabus rectis parallelis; vel si duæ diametri occurrant duabus rectis parallelis; ut patet ex Prop. 19. 20. & 21. huj. & 1. 6. Euclidis.

PROP.

PROP. XXII.

Si duæ rectæ lineæ AB, AC Parabolam contingant, & uni ipsarum AC occurrat diameter DF in D, per occursum vero ducatur DE alteri contingenti parallela; erit rectangulum contentum segmento diametri DF inter occursum & verticem, & latere recto diametri quæ transit per contactum contingentis cui parallela ducta est, æquale quadrato ex DE segmento parallelæ inter eundem occursum & rectam CB, quæ per utrumque contactum transit. Fig. 40.

Sit recta G latus rectum diametri per C, & recta H latus rectum diametri per B, eritque rectangulum DF in G æquale quadrato ex DC; est vero quadratum ex DC ad quadratum ex DE, ut (quadratum ex AC ad quadratum ex AB, hoc est, ut G ad H, [Cor. 19. huj.] hoc est, ut) DF in G ad DF in H; & ostensum fuit esse rectangulum DF in G æquale quadrato ex DC: quare & rectangulum DF in H æquale est quadrato ex DE.

PROP. XXIII.

Si duæ rectæ sibi invicem occurrant, sive una, sive utraque, sive neutra Parabolam secet in duobus punctis, vel contingat, vel ipsi non occurrat; erit rectangulum contentum segmentis primæ inter occursum rectarum & puncta quibus sectioni occurrit: vel, si contingat sectionem, erit quadratum ex segmento ipsius inter occursum rectarum & contactum: vel, denique, si non occurrat Parabolæ, erit quadratum ex segmento ipsius, inter occursum rectarum & punctum quo primæ rectæ occurrit diameter cui ordinatim applicatæ sunt ipsi parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem primæ rectæ convenit, ad rectangulum, vel ad quadratum, vel ad quadratum & spatium proportionale similiter ad secun-

secundam rectam relata, prout scil. ea secat vel contingit sectionem, vel eidem non occurrit; ut latus rectum diametri cui ordinatim applicatæ sunt parallelæ primæ rectæ, ad latus rectum diametri cui ordinatim applicatæ parallelæ sunt secundæ rectæ.

FIG. 41. Occurrant rectæ AB, AD sibi mutuo in A, & Parabolæ in B, C & D, E punctis; & per A ducatur diameter Parabolæ occurrens in F; sitque recta G æqualis lateri recto diametri rectæ BC, diametri vero rectæ DE latus rectum æquale sit ipsi H: igitur, per Prop. 20. huj. rectangulum BAC æquale est rectangulo AF in G, rectangulum vero DAE æquale est ipsi AF in H; ergo est rectangulum BAC ad rectangulum DAE, ut AF in G ad AF in H, hoc est, ut G ad H.

FIG. 42. Si vero una rectarum ABC Parabolam secet, altera autem AD ipsi non occurrat; ducatur diameter GH cui ordinatim applicatæ sunt ipsi AD parallelæ, & per A ducatur diameter AF, sitque K spatium proportionale quod rectæ AD convenit, latus vero rectum diametri rectæ BC sit L, diametri vero GH latus rectum sit M: igitur erit rectangulum BAC æquale rectangulo AF in L, quadratum vero ex AG simul cum spatio K æqualia erunt rectangulo AF in M (21. huj.); ergo est rectangulum BAC ad quadratum ex AG simul cum spatio K, ut AF in L ad AF in M, hoc est, ut L ad M. Et similiter demonstrabitur Propositio in reliquis casibus: & quæ de Ellipsi & Hyperbola in 15. huj. ostensa fuerunt, hic etiam similiter ostendentur.

PROP. XXIV.

Si a puncto, in recta Parabolam contingente, ducatur recta alii contingenti parallela, ab eodem vero puncto ducatur alia recta utcunque; prout secunda hæc recta sectionem secat, vel contingit, vel ipsi non occurrit; erit rectangulum contentum segmentis ejus inter punctum a quo ducta est recta, & puncta quibus sectioni occurrit: vel, si contingat, erit quadratum ex segmento

to, contingentis, inter punctum & contactum: vel, si non occurrat, erit quadratum ex segmento ejus, inter punctum a quo ducta est recta & punctum quo ipsi occurrit diameter cui ordinatim applicatæ sunt huic rectæ parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem convenit; ad quadratum ex segmento rectæ primæ, inter prædictum punctum a quo ducta est, & rectam quæ per contactus contingentium transit; ut latus rectum diametri secundæ rectæ ad latus rectum diametri primæ rectæ.

DEmonstratur ex 22 & 20. vel 19 vel 21. huj. lib. 4. eodem modo quo præcedens.

Cor. Et ex hac 24. & ex ipsa & 23. junctim, similia sequuntur iis quæ in Prop. 15. ostensa fuerunt ex 14.

PROP. XXV.

Si diameter transversa Hyperbolæ occurrat rectæ quæ alterutri asymptoto est parallela, erit rectangulum contentum segmentis diametri inter occursum & vertices ipsius, ad quadratum ex semidiametro; ut segmentum parallelæ inter Hyperbolam & punctum quo diametro occurrit, ad segmentum ejusdem inter Hyperbolam & alteram asymptoton.

Si vero diameter secunda Hyperbolæ occurrat rectæ quæ alterutri asymptoto est parallela, erit quadratum ex segmento diametri inter occursum & centrum, simul cum quadrato ex semidiametro, ad quadratum ex semidiametro; ut segmentum parallelæ inter Hyperbolam & diametrum, ad segmentum ejusdem inter Hyperbolam & alteram asymptoton.

Cas. I. OCcurrat diameter transversa CD rectæ AB, quæ parallela est asymptoto GF, in E; ipsa vero AB occurrat Fig. 43, 44.
Hyper-

Hyperbolæ in B, & alteri aſymptoto in A: erit rectangulum CED ad quadratum ex GC, ut recta BE ad rectam BA.

A punctis C, B, E ducantur ad aſymptoton GF rectæ CF, BH, EK, alteri aſymptoto parallelæ; & erit KG ad FG, ut (KE, ſeu BH, ad CF, hoc eſt, propter Hyperbolam, ut) FG ad HG; quare proportionales ſunt KG, FG, HG: igitur eſt quadratum ex KG ad quadratum ex FG, ut KG ad HG, (Cor. 20. 6.); ergo, propter parallelas, eſt quadratum ex EG ad quadratum ex CG, ut EA ad AB: &, dividendo, quando punctum E eſt in CD producta, dividendo vero inverſè, quando E eſt inter C, D puncta, eſt rectangulum CED ad quadratum ex GC, ut EB ad BA.

FIG. 45. *Caſ.* 2. Quando diameter ſecunda rectæ occurrit, erit quadratum ex EG, ſimul cum quadrato ex GC, ad quadratum ex GC, ut BE ad BA.

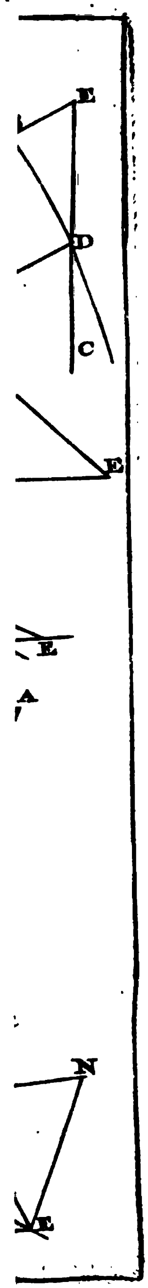
Nam, iiſdem conſtructis, prorſus ut in præcedente caſu, oſtendetur eſſe quadratum ex EG ad quadratum ex CG, ut EA ad AB: & igitur, componendo, erunt quadrata ex EG, GC ſimul ad quadratum ex CG, ut EB ad BA.

FIG. 43, 44, 45. COR. Iiſdem manentibus, ſi præterea ducatur a vertice diametri C recta CL ad aſymptoton, parallela ipſi AB, & a punctis C, E ducantur ad alterutram aſymptoton rectæ CM, EN inter ſe parallelæ; erit rectangulum CED, vel ſumma quadratorum ex EG, CG, prout CD eſt diameter tranſverſa vel ſecunda, ad quadratum ex CG, ut rectangulum NEB ad rectangulum MCL.

Nam quoniam eſt NE ad MC, ut EG ad CG, hoc eſt, ut AG ad LG, hoc eſt, propter Hyperbolam, ut CL ad BA; erit NE ad MC, ut CL ad BA; & igitur eſt rectangulum NE in BA æquale ipſi MCL: eſt vero, per hanc Propoſitionem, rectangulum CED, vel ſumma quadratorum ex EG, CG, ad quadratum ex CG, ut BE ad BA, hoc eſt, ut NEB rectangulum ad rectangulum NE in BA, ſeu MCL.

PROP. XXVI.

Si recta linea neutri aſymptoto parallela Hyperbolam vel oppoſitas Hyperbolas ſecet, vel unam ipſarum contingat, vel ipſis non occurrat, & a puncto in ipſa ducatur recta


E
D
C
E
E
A
N
E

recta uni asymptoton parallela, quæ proinde uni Hyperbolarum necessario occurret (18. lib. 3.); erit rectangulum contentum segmentis rectæ secantis, inter punctum a quo ducta est parallela, & Hyperbolam vel Hyperbolas; vel quadratum ex segmento contingentis, inter punctum & contactum, vel, si recta Hyperbolis non occurrat, erit quadratum ex segmento ipsius, inter punctum & diametrum cui ordinatim applicatæ sunt huic rectæ parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem rectæ convenit, ad rectangulum contentum segmento ejusdem rectæ inter asymptoton & rectam ipsi parallelam, & segmento ejusdem parallelæ inter Hyperbolam & rectam: ut segmentum rectæ inter asymptotos, ad segmentum asymptoti cui ducta fuit parallela, inter centrum & rectam.

SInt Hyperbolæ oppositæ, quarum asymptoti GK, GL; & secet recta KL asymptotos in K, L, & Hyperbolam aut Hyperbolas in F, H, ut in figg. 46, 47. vel ipsam contingat, ut in fig. 48. vel denique ei non occurrat, ut in fig. 49. & a puncto quovis E, in KL, ducatur recta EBA parallela asymptoto GK, alteri occurrens in A, & Hyperbolæ in B; &, in casu quo recta KL Hyperbolæ non occurrit, ducatur ad ipsam diameter GM, cui ordinatim applicatæ sunt ipsi KL parallelæ, sitque S spatium proportionale conveniens eidem KL: erit, in primo casu, rectangulum FEH, in secundo, quadratum ex EF, in tertio, erit quadratum ex EM simul cum spatio S, ad rectangulum KEB, ut recta KL ad rectam KG. FIG. 46, 47, 48, 49.

Sit enim GN semidiameter ipsi KL parallela, juncta vero GE Hyperbolæ occurrat in C, & per C ducatur recta parallela eidem KL asymptotis occurrens in O, P, & ipsi BA ducatur parallela CQ asymptoto GA occurrens in Q: &, quoniam in primo casu recta KL occurrit Hyperbolæ vel Hyperbolis in F, H, & diametro GC in E; erit (per Prop. 10. vel 11. lib. huj.) rectangulum FEH ad rectangulum CED, vel quadrata ex EG, CG simul, prout GC fuerit diameter transversa vel secunda, ut quadratum ex GN ad quadratum ex GC: &, permutando, est rectangulum FEH ad quadratum

dratum ex GN, ut (rectangulum CED, vel quadrata ex EG, CG simul, ad quadratum ex CG, hoc est, per Cor. 25. huj. ut) rectangulum KEB ad rectangulum OCQ. Est vero quadratum ex GN æquale rectangulo OCP (Def. 11. & Cor. 4. 23. lib. 3.) quare est rectangulum FEH ad rectangulum OCP, ut rectangulum KEB ad rectangulum OCQ: &, permutando, est FEH ad KEB, ut OCP ad OCQ, hoc est, ut CP ad CQ, hoc est, ut KL ad KG.

Secundus casus ex Prop. 8. vel 9. & tertius ex Prop. 12. vel 13. eodem prorsus modo demonstrantur.

Cor. 1. Si duæ rectæ inter se, sed neutri asymptoto parallelæ, occurrant rectæ quæ uni asymptotôn parallela est, prout una vel utraque ex rectis parallelis Hyperbolam vel Hyperbolas secat, contingit, vel ipsis non occurrit: erit rectangulum contentum segmentis primæ parallelæ, inter rectam asymptoto parallelam, & puncta quibus prima illa sectioni vel sectionibus occurrit; vel, erit quadratum ex segmento primæ parallelæ, inter rectam asymptoto parallelam, & punctum in quo prima illa sectionem contingit; vel, erit quadratum ex segmento primæ parallelæ, inter rectam asymptoto parallelam, & punctum in quo diameter cui ordinatim applicatæ sunt parallelæ primæ rectæ, simul cum spatio proportionali quod eidem primæ convenit: ad rectangulum, vel ad quadratum, vel ad quadratum & spatium proportionale similiter ad secundam parallelam relata: ut segmentum rectæ asymptoto parallelæ, inter punctum in quo sectioni occurrit, & primam parallelam; ad segmentum ejusdem rectæ, quæ asymptoto parallela est, inter idem punctum occursûs, & secundam parallelam (per Prop. hanc & 1. 6.)

Cor. 2. Et si recta, neutri asymptoto parallela, occurrat duabus rectis, quæ inter se, & uni asymptotôn sunt parallelæ; vel, si duæ rectæ inter se, sed neutri asymptoto parallelæ, occurrant duabus rectis inter se, & uni asymptotôn parallelis: similia sequentur, ex hac Propositione, iis quæ in 15. huj. ostensa fuerunt ex 14.

SCHOLIUM.

Utraque Propositio, 14. sciz. & 23. sex habet casus: quorum tres, ii nimirum in quibus una vel utraque rectarum sectionem conicam secat vel contingit, affectionem inter præcipuas harum sectionum

huc-

huicusque cognitas merito æstimandam continent. Atque hos casus Archimedem, maximam saltem partem, cognovisse, liquido constat, tum ex iis quæ Prop. 4. de Conoidibus & Sphæroidibus *præmittit, tum ex ejusdem libri Propp.* 13, 14, 15. *Apollonius vero eosdem omnes tres casus in lib.* Conicorum 3. *a Prop.* 16. *ad* 23. *demonstrat. Reliqui autem tres casus, in quibus scil. una vel utraque rectarum sectioni conicæ non occurrit, Apollonium aliosque Geometras hactenus latuisse videntur. Et quidem non facile in mentem alicui veniret, rectas extra sectionem sitas eandem sortiri affectionem cum iis quæ sectionem secant vel contingunt. Eandem tamen obtinent: nam nullâ aliâ re differt casus in quo recta sectioni non occurrit, ab eo in quo eandem secat, præterquam quòd in hoc, excessus; in isto autem, summa duorum spatiorum adhibeatur. Generalem proinde hanc sectionum conicarum affectionem duplo auctiorem reddidimus; omnesque Propp.* 14. 23. *lib. hujus casus ita enunciari possunt, viz.*

Si duarum rectarum sibi mutuo occurrentium una secet, vel contingat sectionem conicam, vel ipsi non occurrat, & similiter altera vel ipsam secet, contingat, vel ei non occurrat; & ducantur diametri quibus ordinatim applicatæ sunt hisce rectis parallelæ: erit excessus quadrati ex segmento utriusvis rectæ, inter diametrum suam & occursum rectarum, & spatii proportionalis quod huic rectæ convenit, vel erit summa quadrati & spatii, ad excessum quadrati ex segmento alterius rectæ, inter diametrum suam & occursum rectarum, & spatii proportionalis quod huic alteri rectæ convenit, vel ad summam quadrati & spatii; ut quadratum ex semidiametro parallela primæ rectæ, ad quadratum ex semidiametro quæ alteri rectæ parallela est; vel, si sectio fuerit Parabola, ut latus rectum diametri primæ rectæ, ad latus rectum diametri alterius rectæ, scil. sumendus est excessus quadrati & spatii proportionalis quoties recta secat sectionem, summa vero eorundem sumenda est quoties recta non occurrit sectioni.

Si autem recta contingat sectionem solum quadratum sumendum venit; nam ex Definitione constat in hoc casu nullum esse spatium proportionale.

PROP. XXVII.

Si rectâ AB, quæ parallela est ordinatim diametro cuivis applicatis, occurrat ipsi in C, & ducantur duæ rectæ DE, DF, vel parallelæ diametro, vel a puncto quovis FIG. 50, 51.

in ipsa D, abscindentes ex recta AB inter ipsas & diametrum, segmenta EC, FC æqualia; & ducatur a puncto in sectione G recta GH ipsi AB parallela sectioni rursus occurrens in L, & ductis DE, DF in K, L punctis: erunt hujus segmenta GK, HL inter sectionem & ductas, ex utraque parte, inter se æqualia.

Occurrat enim diameter DC ipsi GH in O; &, quoniam GH ordinatim diametro applicatur, æquales erunt GO, OH; &, quoniam æquales sunt FC, CE, erunt KO, OL æquales: quare & KG, LH inter se æquales erunt.

Fig. 50, 51. Cor. 1. Si igitur altera rectarum DE, DF, puta DF, sectionem secet ut in M, N, vel si ipsam contingat, vel ei non occurrat; erit rectangulum KGL ad rectangulum MKN, in primo casu; vel ad quadratum ex segmento contingentis, inter ipsarum DF, GH occursum, & contactum, in secundo casu; vel ad quadratum ex segmento ipsius DF, inter eundem occursum, & punctum quo rectæ DF occurrit diameter cui ordinatim applicatæ sunt ipsi DF parallelæ, simul cum spatio proportionali quod eidem DF convenit: ut quadratum ex semidiametro ipsi GH, seu AB parallela ad quadratum ex semidiametro quæ rectæ DF est parallela. Nam, propter æquales KG, LH, est rectangulum KGL æquale ipsi GKH; ergo constat Corollarium per Prop. 14. aut 23.

Fig. 51. Cor. 2. Si trapezium MNPQ, cujus duo latera MP, NQ sunt inter se parallela, sectioni conicæ inscribatur; & a puncto in sectione G ducatur GH, parallela lateribus trapezii parallelis: erit rectangulum contentum segmentis ductæ, inter punctum & latera, scil. rectangulum KGL, ad rectangulum MKN contentum segmentis alterutrius lateris; ut quadratum ex semidiametro quæ ductæ est parallela, ad quadratum ex semidiametro quæ lateri est parallela.

Secentur enim MP, NQ bifariam in R, S, & juncta RS erit diameter sectionis, occurrat hæc ipsi MN in D; &, quoniam est DR ad DS, ut (RM ad SN, hoc est, ut) RP ad SQ, erunt D, P, Q puncta in recta linea (per Lem. 1. lib. 2.) &, quoniam est PM ordinatim applicata diametro DC, & a puncto D in diametro ductæ sunt DM, DP, erit (per Cor. præc.) rectangulum KGL ad rectan-

rectangulum MKN, ut quadratum ex semidiametro ipsi PM ad quadratum ex ea quæ parallela est rectæ MN.

PROP. XXVIII.

Si sectioni conicæ inscribatur trapezium, cujus nulla latera sunt inter se parallela, & a puncto quovis sectionis ducantur duæ rectæ parallelæ duobus trapezii lateribus adjacentibus: erit rectangulum contentum segmentis unius inter punctum in sectione & latera opposita trapezii, ad rectangulum contentum segmentis alterius inter idem punctum & reliqua trapezii latera; ut quadratum ex semidiametro parallela primæ rectæ, ad quadratum ex semidiametro quæ alteri est parallela, sciz. si sectio fuerit Ellipsis, Hyperbola vel Hyperbolæ oppositæ: si vero fuerit Parabola, erunt prædicta rectangula ad se invicem, ut latera recta diametrorum, quibus ordinatim applicantur ea trapezii latera quæ rectis a puncto sectionis ductis sunt parallela.

Sit ABCD trapezium sectioni conicæ inscriptum, & a puncto in sectione E ducantur EG, EH parallelæ lateribus adjacentibus BC, BA; quarum EG occurrit lateribus oppositis in F, G, altera vero EH reliquis in H, K punctis: erit rectangulum GEF ad rectangulum HEK, ut quadratum ex semidiametro parallela rectæ BC ad quadratum ex semidiametro quæ parallela est ipsi BA. Fig. 52.

Per punctum C ducatur CL lateri AB parallela, sectioni rursus occurrens in L, & rectæ EG in M; juncta vero AL occurrat EH in N, & per D ducatur DO parallela ipsi AB, seu CL, & occurrens ipsis AL, BC in O, P punctis. Quoniam igitur parallelæ sunt tres rectæ AB, DP, HK, erit BH ad BP, ut (AK ad AD, hoc est, ut) KN ad DO; &, permutando, est BH ad KN, ut BP ad DO, propter vero æquiangula triangula FMC, CPD, est FM ad MC, ut CP ad PD; ergo rationes ex hisce æqualibus compositæ sunt inter se æquales, ideoque (per 23. 6.) est rectangulum BH in FM ad KN in MC, ut rectangulum BP in CP ad DO in PD. Est vero ABCL tra-

trapezium sectioni inscriptum, duo habens opposita latera AB, CL parallela, quare (per Cor. 2. 27. huj.) est rectangulum BPC ad PDO, ut rectangulum BHC ad HEN; ergo est BHC, seu GEM, ad HEN, ut BH in FM, seu GE in FM, ad KN in MC, seu KN in EH; ideoque (per 12. 5. aut 19. 5.) est rectangulum GEF ad rectangulum HEK, ut (BHC rectangulum ad rectangulum HEN, hoc est, ut) quadratum ex semidiametro parallela ipsi BC, ad quadratum ex semidiametro quæ parallela est ipsi AB.

Propositio hæc est casus 2. Lemmatis 17. lib. 1. Phil. Nat. Princip. Mathem.

Fig. 52. Cor. 1. Hinc, si sectio conica positione data fuerit, sintque latera AB, BC parallelæ rectis positione datis; dabuntur semidiametri quæ ipsis parallelæ sunt, ideoque dabitur ratio rectangulorum GEF, HEK.

Fig. 53. Cor. 2. Si in sectione conica positione data inscribatur trapezium ABCD, cujus latera positione dantur; & a puncto quovis in sectione E ducantur rectæ EF, EG, EH, EK ad quatuor trapezii latera datos cum ipsis angulos comprehendentes: erunt rectangula *FEH*, GEK, contenta rectis ad opposita latera ductis, ad se invicem in ratione data.

A puncto E ducantur rectæ EL, EO parallelæ duobus quibuscunque trapezii lateribus adjacentibus, sciz. ipsis BC, BA; occurrantque lateribus oppositis in L, M, & N, O punctis. Quoniam igitur in triangulo ELF, datus ex hypothesi est angulus LFE, & est angulus ELF æqualis dato angulo CBA, specie dabitur triangulum ELF, (40. Dat.) ergo datur ratio FE ad EL; eâdemque ratione in triangulo EMH dabitur ratio EH ad EM; quare datur ratio ex hisce composita, hoc est (per 23. 6.) ratio rectanguli FEH ad rectangulum LEM: eodem modo ostendetur rationem rectanguli OEN ad rectangulum GEK datam esse. Quoniam vero a puncto sectionis E ductæ sunt LEM, ENO parallelæ lateribus adjacentibus BC, BA trapezii ABCD, dabitur ratio rectanguli LEM ad rectangulum OEN (per Cor. præcedens); igitur quoniam ostensum est datam esse rationem rectanguli FEH ad ipsum LEM, & rationem LEM ad OEN, ipsiusque OEN ad rectangulum GEK; dabitur (per 8. Dat.) ratio FEH ad GEK.

PROP.

PROP. XXIX.

Si a puncto A in sectione conica ducantur ad sectionem duæ rectæ AB, AC; & ab alio quovis in sectione puncto D ducantur aliæ duæ DE, DF parallelæ primo ductis: rectæ quæ conjungunt terminos ductarum a primo puncto, cum terminis reliquarum quæ istis non sunt parallelæ, erunt inter se parallelæ. Fig. 54.

Occurrant sibi mutuo AB, DF in G, & AC, DE in H; & per Prop. 14. aut 23. huj. erit rectangulum AGB ad rectangulum DGF, ut rectangulum DHE ad rectangulum AHC; quare, permutando, & propter æquales AG, DH, & DG, AH, erit (per 1. 6.) GB ad HE, ut GF ad HC: &, permutando, GB ad GF, ut HE ad HC; & sunt circa æquales angulos ad G & H; ergo (per 6. 6.) æquiangula sunt triangula BGF, EHC, ideoque æqualis est angulus GBF ipsi HEC; & parallela sunt GB, HE, quare parallelæ sunt BF, EC (27. aut 28. 1.) Et si una vel duæ ex rectis sectionem contingant, eadem sequentur.

Cor. 1. Et contra: Si duæ rectæ parallelæ AB, DE in sectione conica inscribantur, & a duobus ipsarum terminis inflectantur ad sectionem rectæ BF, DF, a reliquis vero E, A ducantur EC, AC ipsis BF, DF parallelæ: erit intersectio ipsarum C in eadem sectione. Fig. 54.

Si enim EC non occurrat sectioni in C, occurrat eidem in M; & quoniam a puncto in sectione B ad ipsam ductæ sunt BA, BF, & ab alio puncto E ad eandem ductæ sunt ED, EM ipsis parallelæ, erit juncta AM parallela ipsi DF, hoc est, ex hypothesi, ipsi AC. *Q. E. A.* Non est igitur punctum M in sectione, neque aliud in ipsa EC punctum præter C.

Cor. 2. Et si parallelogrammum AGDH tangat sectionem conicam tribus ejus angulis A, D, H, & occurrant rectæ quartum angulum G comprehendentes sectioni rursus in B, F; recta per oppositum angulum H ducta, parallela junctæ BF, sectionem contingit. Et contra: Quæ sectionem contingit in H, parallela erit ipsi BF. Fig. 55, 56.

Ducatur enim per H recta HN ipsi BF parallela, & si HN secti-

A. onem

onem non contingat, occurrat ei, si fieri potest, rursus in M; & quoniam a puncto B ad sectionem ductæ sunt BA, BF, & ab alio puncto H ductæ sunt HD, HM ipsis parallelæ, erit juncta AM parallela ipsi DF, hoc est, ex hypothesi, ipsi AH. *Q. E. A.*

Et si HN contingat sectionem, parallela erit ipsi BF; nam si non fuerit, recta quæ per H ducitur ipsi parallela, sectionem quoque contingeret. *Q. E. A.*

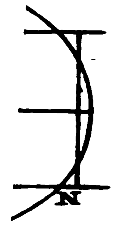
PROP. XXX. *Quæ* XXIV. *est lib.* 3. *Apollonii.*

Si inter Hyperbolas conjugatas ducantur duæ rectæ, parallelæ duabus diametris conjugatis, occurrantque sibi ipsis in loco inter quatuor sectiones intermedio: rectangulum contentum segmentis primæ inter occursum & sectiones, quarum diametro transversæ est parallela, simul cum spatio ad quod rectangulum contentum segmentis secundæ rectæ inter occursum & reliquas sectiones, rationem habet eandem quam habet quadratum ex semidiametro quæ secundæ rectæ est parallela, ad quadratum ex semidiametro ipsi conjugata, æquale erit duplo quadrati ex hac semidiametro.

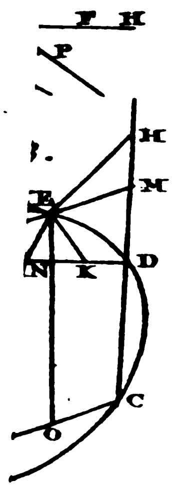
Fig. 57, 58. Sint AB, CD diametri conjugatæ sibi mutuo occurrentes in centro E, quarum AB transversa sit, & CD secunda in sectionibus A, B; ipsi vero AB parallela sit FG, cui occurrat HK, quæ ipsi CD parallela est, in L: erit rectangulum FLG, simul cum spatio ad quod rectangulum HLK rationem habet eandem quam quadratum ex CE ad quadratum ex AE, æquale quadrato ex AE bis.

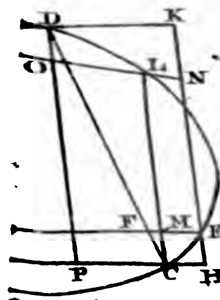
Fig. 57. Occurrat FG ipsi CD in M, & ad diametrum AB ducatur FN parallela conjugatæ CD. Et, primo, non occurat FG sectionibus C, D, sitque S spatium proportionale ipsi FG conveniens in hisce sectionibus; &, per Definitionem hujus spatii, erit rectangulum CMD ad spatium S, ut (quadratum ex CE ad quadratum ex AE, hoc est, ut) quadratum ex FN ad rectangulum ANB; quare, per 12. 5. est rectangulum CMD ad spatium S, ut CMD & quadratum ex FN, seu ME simul, hoc est, quadratum ex CE ad ANB & S simul; & ostensum fuit esse CMD ad S, ut quadratum ex CE ad quadratum

ex



49.





7.144.

ex AE; ergo est quadratum ex CE ad quadratum ex AE, ut idem quadratum ex CE ad ANB & S simul; ideoque quadratum ex AE æquale est rectangulo ANB & spatio S simul; addatur commune ex AE quadratum, & quadratum ex AE bis æquale erit quadrato ex NE, seu FM & spatio S simul, hoc est (5. 2.) rectangulo FLG, quadrato ex LM & spatio S: & (per Prop. 14. huj.) quoniam rectæ HK, FG sibi mutuo occurrunt in L, quarum HK sectionibus oppositis C, D occurrit, ipsis autem FG non occurrit; erit rectangulum HLK ad quadratum ex LM & spatium S simul, ut quadratum ex CE ad quadratum ex AE. *Q. E. D.*

Secundo, Occurrat jam FG sectioni C in O, P; est igitur rectangulum CMD ad quadratum ex OM, ut (quadratum ex CE ad quadratum ex AE, hoc est, ut) quadratum ex FN seu ME ad rectangulum ANB; quare, per 19. 5. est CMD ad quadratum ex OM, ut quadratum ex CE ad excessum rectanguli ANB supra quadratum ex OM; ergo quadratum ex AE æquale est excessui rectanguli ANB supra quadratum ex OM, ideoque quadrata ex AE, OM simul æqualia sunt rectangulo ANB; addatur commune quadratum ex AE, & quadratum ex AE bis, simul cum quadrato ex OM, æquale erit quadrato ex NE, seu FM; &, ablato communi quadrato ex OM, erit quadratum ex AE bis æquale rectangulo FOG, hoc est, (per Lemma Pappi in pag. 32. huj.) rectangulo FLG & rectangulo OLP simul; habet autem (per 14. huj.) HLK ad OLP rationem eandem quam quadratum ex CE ad quadratum ex AE. *Q. E. D.* Fig. 58.

Si vero rectæ FG, HK conveniant in una asymptotôn, æquale erit rectangulum FLG quadrato ex AE, & rectangulum HLK quadrato ex CE (per Cor. 1. 15. lib. 3.); quare ut quadratum ex CE ad quadratum ex AE, ita rectangulum HLK ad rectangulum FLG, & est quadratum ex AE bis æquale ipsi FLG bis. *Q. E. D.* Fig. 58.

PROP. XXXI. *Quæ XXV. est lib. 3. Apollonii.*

Iisdem positis, sit rectarum FG, HK occursus L intra unam sectionum C, D; erit rectangulum FLG majus quam illud ad quod rectangulum HLK eandem ratio- Fig. 59.

 nem

nem habet quam quadratum ex CE ad quadratum ex AE, duplo quadrati ex semidiametro AE.

Etenim ostendetur, prorsus ut in secundo casu præcedentis, esse quadratum ex AE bis æquale rectangulo FOG: est autem (per Lemma Pappi in pag. 32. huj.) rectangulum FLG æquale rectangulis FOG, OLP simul, hoc est, quadrato ex AE bis & rectangulo OLP simul; & est rectangulum HLK ad rectangulum OLP (14 huj.) ut quadratum ex CE ad quadratum ex AE.

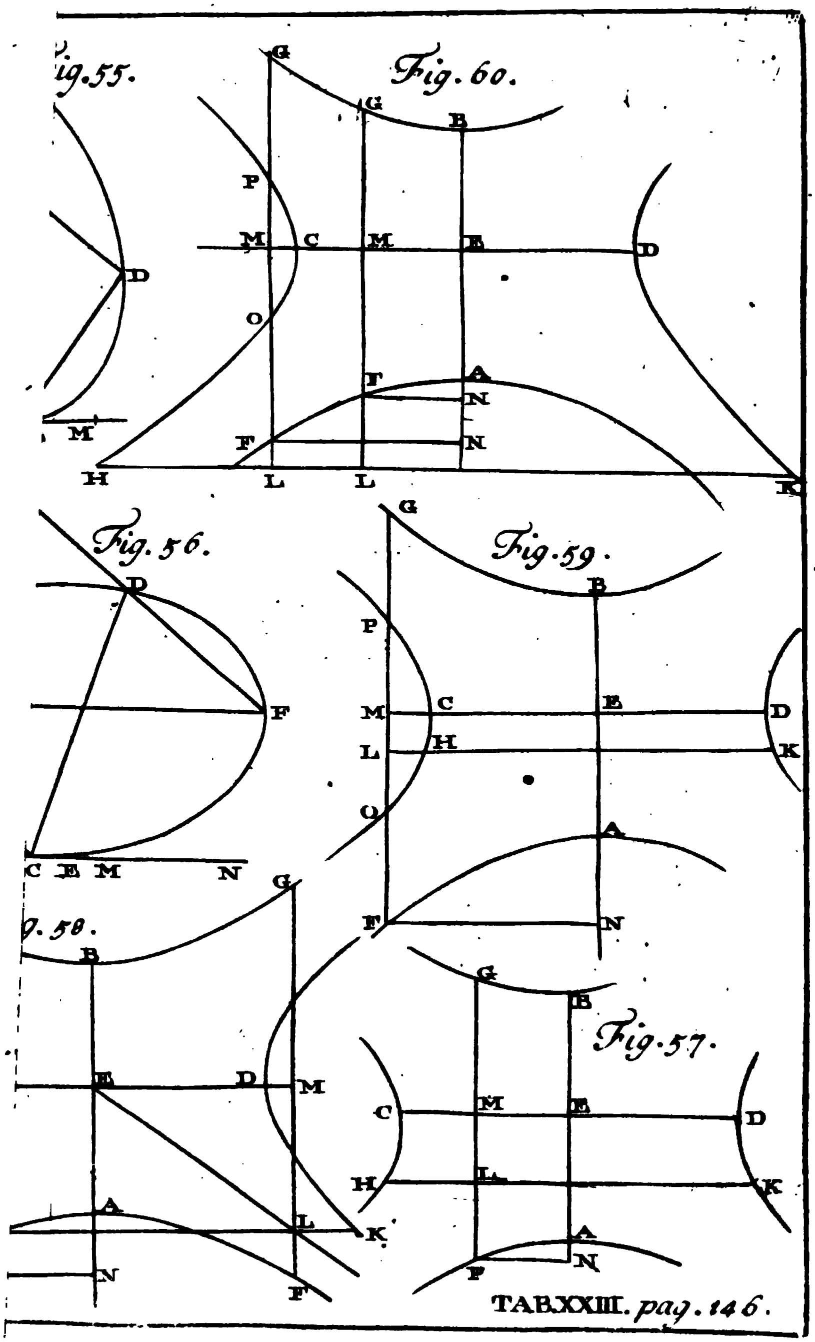
PROP. XXXII. *Quæ XXVI. est lib. 3. Apollon.*

Quod si ipsarum FG, HK occursus L sit intra unam sectionum A, B; erit rectangulum FLG minus illo ad quod rectangulum HLK eandem rationem habet quam quadratum ex CE ad quadratum ex AE, duplo quadrati ex semidiametro AE.

Fig. 60. Primo, Non occurrat FG sectionibus C, D; &, ut in casu primo Prop. 30. huj. ostensum fuit, erit quadratum ex AE bis æquale quadrato ex FM & spatio proportionali S quod rectæ FG convenit; commune addatur rectangulum FLG, erit quadratum ex AE bis, simul cum FLG rectangulo, æquale quadrato ex LM simul cum spatio S; quare quadratum ex LM & spatium S simul excedunt rectangulum FLG duplo quadrati ex AE, & (14. huj.) est rectangulum HLK ad quadratum ex LM & spatium S simul, ut quadratum ex CE ad quadratum ex AE.

Fig. 60. Secundo, Occurrat jam FG sectioni C in O, P punctis; &, ut in casu secundo Prop. 30. huj. ostensum fuit, erit quadratum ex AE bis æquale rectangulo FOG; addatur commune rectangulum FLG, & erit quadratum ex AE bis, simul cum rectangulo FLG, æquale rectangulo OLP; & est (14 huj.) rectangulum HLK ad rectangulum OLP, ut quadratum ex CE ad quadratum ex AE.

SECTI-



TAB.XXIII. pag. 146.

SECTIONUM CONICARUM

LIBER QUINTUS.

PROP. I. *Apollon.* XXXVII. XXXIX. *lib.* 3.

Si duæ rectæ sectionem conicam contingentes sibi ipsis occurrant, & per contactus recta jungatur; ab occursu vero contingentium ducatur recta sectionem in duobus punctis secans: segmenta ductæ inter occursum & puncta in quibus sectioni occurrit, habebunt inter se eandem rationem quam ejusdem segmenta inter punctum in quo jungenti contactus occurrit & eadem puncta.

SIT sectio conica AB, & contingentes AC, CB; &, junctâ AB, ducatur CDEF: erit ut FC ad CD, ita FE ad ED. FIG. 1, 2, 3.

Ducatur enim per C diameter CG occurrens AB in G, & per D, F ducantur ipsi AB parallelæ, occurrentes contingentibus & sectioni rursus in H, K, L & M, N, O punctis. Quoniam igitur æquales sunt AG, GB (Cor. 2. 1. lib. 4) & a puncto in diametro C ductæ sunt CA, CB, erunt HD, LK & MF, ON inter se æquales; est autem, propter parallelas, MF ad FN, ut HD ad

 DK,

DK, ideoque similia sunt MFN, HDK rectangula; & quoniam proportionales sunt MF, HD, MC, CH, erit, per 22. 6. rectangulum MFN ad rectangulum HDK, ut quadratum ex MC ad quadratum ex CH: &, quoniam parallelæ rectæ MFO, HDL sectionem secant, ipsamque contingit MH in A, erit (per 15. lib. 4.) rectangulum FMO ad quadratum ex MA, ut rectangulum DHL ad quadratum ex AH; &, permutando, est FMO ad DHL, ut quadratum ex MA ad quadratum ex AH: ostensum vero fuit rectangulum FMO, seu MFN, esse ad ipsum DHL, seu HDK, ut quadratum ex MC ad quadratum ex CH; ergo, ut quadratum ex MC ad quadratum ex CH, ita est quadratum ex MA ad quadratum ex AH; quare MC est ad CH, ut MA ad AH (22. 6.) Ergo, propter parallelas, est FC ad CD, ut FE ad ED.

DEFINITIO.

Recta quæ ita secatur in tres partes, ut tota sit ad unam ex extremis, ut altera extrema ad partem mediam, dicitur *Harmonicè secari.*

Cor. 1. ad præced. Prop. Si a concursu duarum contingentium AC, BC ducatur recta CD sectioni conicæ in duobus punctis D, F occurrens, & secetur CDF harmonicè in E inter D & F; recta AB contactus jungens transibit per E. Non enim; sed, si fieri potest, transeat AB per punctum P; ergo per hanc Propositionem est FP ad PD, ut FC ad CD, hoc est, ex hypothesi, ut FE ad ED. *Q. E. A.*

Fig. 1, 2, 3. Cor. 2. Iisdem manentibus, quoniam G est in recta AB, puncta A, E, G, B erunt in recta linea; ideoque juncta GE parallela erit ordinatim applicatis diametro CG.

Fig. 1, 2, 3. Cor. 3. Et si a puncto C ducatur alia recta CLO sectioni occurrens in duobus punctis L, O, & in ipsa sumatur inter L, O punctum S divisionis harmonicæ, erit S in recta AGB; ideoque juncta ES transibit per G, & parallela erit ordinatim diametro CG applicatis: &, in Ellipsi & Hyperbola, si Q sit centrum sectionis, & QGR ejusdem semidiameter, erunt QG, QR, QC proportionales; in Parabola vero sit R vertex diametri CG, eruntque GR, RC æquales.

Cor.

COR. 4. Et propterea, si sectio conica positione detur, punctumque A, dabitur punctum G & recta AGB positione, hoc est, tanget punctum E vel S rectam positione datam.

PROP. II.

Si in diametro Ellipseos vel Hyperbolæ sumantur duo puncta A, B, (ad diversas centri partes si fuerit diameter secunda Hyperbolæ, secus ad easdem) ita ut semidiameter CD sit inter distantias punctorum a centro media proportionalis, & per alterutrum punctum A ducatur recta parallela ordinatim diametro applicatis, occurratque alii diametro CE in F, & segmento CF hujus diametri inter centrum & ductam, ipsique semidiametro CE, tertia proportionalis CG ponatur a centro, versus partes contrarias iis ad quas est ducta AF, si fuerit CE diameter secunda, secus ad easdem; recta BG, ducta per terminum tertiæ proportionalis & punctum alterum B, parallela erit ordinatim applicatis alteri diametro CE. Et contra: Si ducatur BG parallela ordinatim applicatis diametro CE, proportionales erunt CF, CE, CG. FIG. 4, 5, 6.

DUcatur enim DH, contingens sectionem in vertice diametri CD, occurratque alteri diametro in H, sitque DK eidem diametro ordinatim applicata; est igitur CH ad CE, ut CE ad CK: ut vero CE ad CF, ita, ex hypothesi, est CG ad CE; quare, ex æquo perturbatè, est CH ad CF, ut CG ad CK; &, propter parallelas, est CH ad CF, ut CD ad CA, hoc est, ex hypothesi, ut CB ad CD: ergo, ut CB ad CD, ita est CG ad CK; ideoque (2. 6.) BG parallela est ipsi DK, quæ ordinatim applicata est diametro CE.

Et si BG parallela sit ipsi DK, similiter demonstrabitur proportionales esse CF, CE, CG.

PROP. III.

Si in diametro CD Parabolæ sumantur duo puncta A, B, FIG. 7.

ad

ad contrarias partes verticis D, & per alterum punctorum A ducatur recta parallela ordinatim applicatis diametro CD, occurratque alii diametro EH in F, & a vertice E ponatur, ad partes contrarias iis ad quas est F, recta EG ipsi EF æqualis; recta BG, ducta per terminum ipsius EG & punctum alterum B, parallela erit ordinatim applicatis diametro EK. Et contra: Si parallela sit BG ordinatim applicatis ipsi EK, æquales erunt EF, EG.

DUcatur enim ad diametrum EF recta DH, contingens sectionem in D, & DK eidem diametro ordinatim applicata; est igitur EH æqualis ipsi EK, &, ex hypothesi, æqualis est EF ipsi EG; quare æqualis est KG ipsi HF, hoc est, ipsi AD, hoc est, ipsi DB: æquales igitur sunt KG, DB, sed & parallelæ; ergo est BG parallela ordinatim applicatæ DK.

Et si sit BG parallela ipsi DK, similiter demonstrabitur æquales esse EF, EG.

PROP. IV.

Si duæ rectæ sectionem conicam contingentes sibi ipsis occurrant, & per occursum ducatur recta parallela rectæ quæ contactus conjungit, & per punctum, quo jungens contactus bifariam secatur, ducatur recta secans & sectionem in duobus punctis, & parallelam per occursum ductam: segmenta ductæ inter parallelam & puncta quibus sectioni occurrit, eandem habebunt rationem, quam ejusdem segmenta inter punctum quo jungenti contactus occurrit, & eadem puncta quibus sectioni occurrit.

FIG. 4, 7. SEctionem contingant AQ, AR in Q, R, & junctæ QR per occursum A ducatur parallela AF; bifariam vero sectâ QR in B, ducatur per B quævis LBMF sectioni occurrens in L, M, & ductæ per A in F: erit LF ad FM, ut LB ad BM.

FIG. 4. Sit enim in Ellipsi & Hyperbola C centrum sectionis, & juncta CF

CF occurrat sectioni in E; ipsis vero CF, CE sumatur tertia proportionalis CG, quæ ponatur ut in 2. huj. dictum fuit; occurrat ...e ABC sectioni in D. Quoniam igitur sectionem contingit QA, ... est QB ordinatim applicata diametro AC, proportionales erunt ...B, CD, CA: &, ex constructione, proportionales sunt CF, CE, ...G, estque AF parallela ordinatim applicatis ipsi CD; ergo, per ... huj. erit juncta BG parallela ordinatim applicatis diametro CE: ...currat BG sectioni in O, P, & junctæ FO, FP contingent sectio...m; ergo, per Prop. 1. huj. est LF ad FM, ut LB ad BM.

In Parabola vero fiat EG æqualis ipsi EF: &, quoniam sectio...m contingit AQ, & est QR ordinatim applicata diametro AC, ...unt æquales BD, DA: &, ex constructione, æquales sunt GE, ...F, & est AF parallela ordinatim applicatis diametro AC; ergo, ...r præcedentem, erit BG ordinatim applicata diametro EF: occurrat BG sectioni in O, P, & junctæ FO, FP contingent sectio...m; ergo, per 1. huj. est LF ad LM, ut LB ad BM.

Cor. 1. Et contra: Si in Ellipsi & Hyperbola semidiameter CD Fig. 4, 7. ...edia proportionalis sit inter CA, CB, in Parabola vero si a vertice diametri D ponantur in ipsa æquales DA, DB, & per punctum B ...ra sectionem ducatur recta LBM sectioni occurrens in duobus ...nctis L, M; & in ipsa sumatur punctum F, extra harmonicè di...lens ipsam LBM, hoc est, quod faciat LF ad FM, ut LB ad BM: ...t juncta AF parallela ordinatim applicatis diametro CD: Nam, si non fuerit, ducatur iisdem parallela Af, occurratque ipsi Fig. 4. ...M in f; & per B ducatur QBR, ipsi AF parallela: quoniam i...ur proportionales sunt CB, CD, CA, & est QBR ordinatim ap...cata ipsi CD, junctæ AQ, AR contingent sectionem; quare, ... 4. huj. erit Lf ad fM, ut (LB ad BM, hoc est, ex hypothesi, ... LF ad FM; &, dividendo, est LM ad Mf, ut LM ad MF: ...oque æquales sunt Mf, MF. *Q. E. A.* In Parabola vero, iisdem ...structis, quoniam æquales sunt AD, DB, & est QBR ordinatim Fig. 7. ...licata ipsi DB, junctæ AQ, AR contingent sectionem; quare, ... 4. huj. erit Lf ad fM, ut LB ad BM: quod fieri non posse in ...cedente casu ostensum est.

Cor. 2. Iisdem manentibus, si per punctum B ducantur duæ re- Fig. 4, 7. ...LBM, PBO, & in ipsis sumantur extra sectionem puncta F, N ...sionis harmonicæ, erunt A, F, N in recta linea. Nam, si non fuit,

sint, jungantur AF, AN; &, per Cor. præced. erit utraque AF, AN parallela ordinatim applicatis diametro CD: quare & inter se parallelæ erunt. *Q. E. D.*

Cor. 3. Et quoniam A, F, N puncta in recta sunt linea, sequitur junctam FN transire per A, ideoque parallelam esse ordinatim applicatis diametro CD, & denique proportionales esse CB, CD, CA in Ellipsi sciz. & Hyperbola; in Parabola vero æquales esse AD, BD.

Cor. 4. Et si sectio conica positione detur, punctumque B, dabitur punctum A & recta AF positione, hoc est, tanget punctum F vel N rectam positione datam.

PROP. V.

Fig. 4, 6, 7. Si in diametro CD sectionis conicæ sumantur duo puncta A, B, quæ in Ellipsi & Hyperbola sita sint respectu centri C, ut in 2. huj. dictum fuit; & sit semidiameter CD media proportionalis inter CB, CA, punctorum sciz. distantias a centro; in Parabola vero sint AD, DB, distantiæ punctorum a vertice D, inter se æquales; & per utrumvis punctorum A, B ducatur recta AS parallela ordinatim applicatis diametro CD, per alterum vero punctum B ducatur recta, sectioni in duobus punctis O, P occurrens: rectarum OF, PF, quæ in his punctis sectionem contingunt, intersectio F erit in recta AS; seu, quod idem est, erit juncta AF parallela ordinatim applicatis diametro CD.

Ducatur enim per F diameter sectionis, occurrens ipsi in E, & OP in G: &, quoniam ex hypothesi sectionem contingunt OF, PF, & est FG diameter sectionis, erit OBG ipsi ordinatim applicata (per Cor. 2. 1. lib. 4.) quare in Ellipsi & Hyperbola proportionales erunt CG, CE, CF, in Parabola autem æquales erunt GE, EF: &, ex hypothesi, proportionales sunt, in primo casu, CB, CD, CA; in casu vero Parabolæ æquales sunt AD, DB; & in utroque est BG ordinatim applicata diametro FE: ergo juncta AF parallela

la est ordinatim applicatis diametro CD (per 2. & 3. huj.) vel ex Prop. 1. & 4. huj. demonstrari potest.

Cor. 1. Iisdem manentibus, si per utrumvis punctorum A, B, puta B, ducantur duæ rectæ sectioni occurrentes OBP, LBM, occurrantque sibi mutuo contingentes per O, P ductæ in F, quæ vero per L, M ducuntur, occurrant in N; erunt puncta N, A, F in recta linea. Nam si non fuerint, jungantur AF, AN, erit utraque harum parallela ordinatim applicatis diametro AB, per hanc Prop. ideoque inter se parallelæ erunt. *Q. E. A.* Fig. 4, 7, 8.

Cor. 2. Et quoniam A, F, N puncta in recta sunt linea, juncta FN transibit per A; ideoque parallela erit ordinatim applicatis diametro AB, & proportionales erunt CB, CD, CA, in Ellipsi scil. & Hyperbola; in Parabola vero æquales erunt AD, BD: ideoque, si sectio conica punctumque B positione data sint, tanget punctum F vel N rectam positione datam.

Cor. 3. Si per punctum quodvis E, intra vel extra sectionem conicam, ducantur duæ rectæ AC, BD, sectioni in punctis A, C & B, D occurrentes; contingentes vero sectionem in A, C sibi ipsis occurrant in H, & quæ sectionem in B, D contingunt occurrant in K; in ipsis vero AC, BD sumantur puncta L, M divisionis harmonicæ: erunt quatuor puncta H, K, L, M in recta linea. Nam, per E ducatur diameter sectionis NO, & in Ellipsi & Hyperbola, distantiæ puncti E a centro N; ipsique semidiametro NO sumatur tertia proportionalis NP, ponenda ut in 2. huj. dictum fuit; in Parabola vero distantiæ puncti E a vertice O fiat æqualis OP; & in utroque casu per punctum P ducatur recta PQ parallela ordinatim applicatis diametro NO: &, per Prop. hanc, concursus contingentium H, K erit in ipsa PQ; & in eadem erunt puncta L, M, per Cor. 1. 4. huj. vel Cor. 2. 1. huj. Fig. 9. n. 1, 2.

PROP. VI.

Iisdem manentibus, si a puncto quovis F, in recta AS, ducantur duæ rectæ, sectionem contingentes; recta quæ contactus jungit transibit per alterum punctum B. Fig. 4, 7, 8.

Ducatur enim per F diameter sectionis, ipsi occurrens in E; &, in Ellipsi & Hyperbola, ipsis CF, CE ponatur, ut in 2. hujus dictum fuit, tertia proportionalis CG; in Parabola vero fiat EG ipsi EF æqualis: quoniam igitur, ex hypothesi, proportionales sunt CB, CD, CA in primo casu, & in casu Parabolæ æquales sunt BD, DA, in utroque vero est AS parallela ordinatim applicatis diametro AB; erit juncta GB parallela ordinatim applicatis diametro EF (per 2. & 3. huj.): occurrat vero GB sectioni in O, P, & junctæ FO, FP sectionem contingent (18. lib. 2. & 34. lib. 3.); ergo recta OP, quæ jungit contactus contingentium quæ a puncto F ducuntur, transibit per B.

Cor. Hinc, si sectio conica & recta AF positione dentur, -bitur diameter AC positione, & puncta C, D in Ellipsi & Hyperbola, punctum vero D in Parabola, ideoque & punctum B.

LEMMA I.

Fig. 10, 11. Si figuræ quadrilateræ ABCDEF, in quo nulla latera sunt inter se parallela, ducantur tres rectæ diagonales AC, BD, EF, sibi mutuo occurrentes in G, H, K punctis: quævis diagonalium harmonice secabitur in punctis quibus lateribus figuræ & reliquis duabus rectis diagonalibus occurrit.

Sit enim quævis ipsarum AC, reliquis diagonalibus in G, K occurrens, & per quodvis reliquorum punctorum figuræ B, D, E vel F, puta D, ducatur recta DL parallela ipsi AC, & reliquis lateribus figuræ occurrat in L, M, reliquæ vero diagonali EF in N. Quoniam igitur parallelæ sunt LDN, ACG, erit LN ad ND, ut (AG ad GC; ut vero AG ad GC, ita, propter parallelas, est) DN ad NM; ergo, per 19. aut 12. 5. est reliqua vel summa LD ad reliquam vel summam DM, ut LN ad ND, hoc est, ut AG ad GC: sed, propter parallelas, est LD ad DM, ut AK ad KC; ergo est AK ad KC, ut AG ad GC.

Cor. Et contra: Si sit FE diagonalis quadrilateræ figuræ, & in

Fig. 1

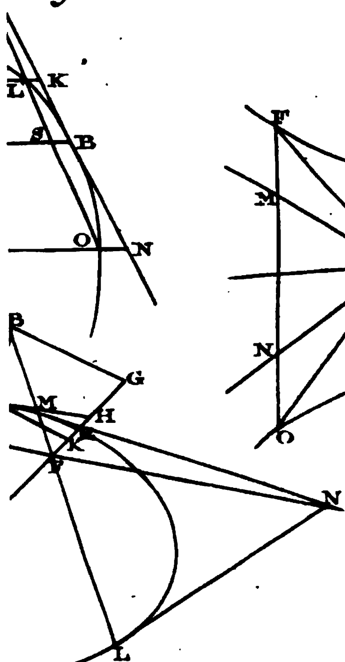


Fig. 2

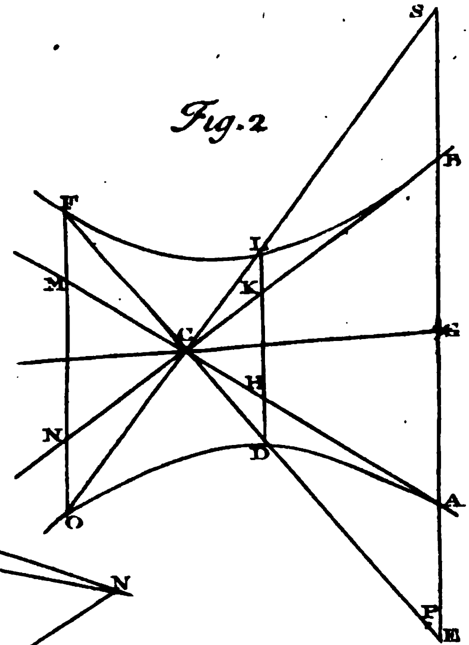


Fig. 3

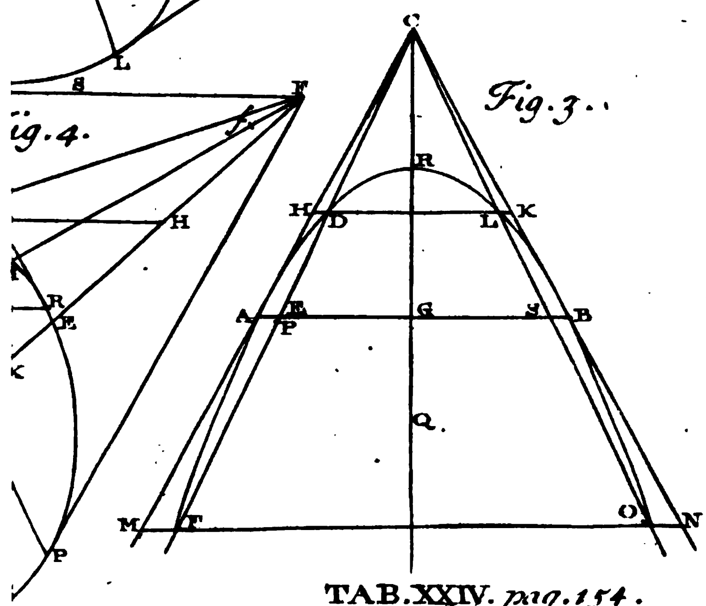


Fig. 4.

TAB. XXIV. *pag. 154.*

in reliquis diagonalibus AC, BD sumantur puncta G, H divisionis harmonicæ; erunt quatuor puncta E, F, G, H in recta linea, ut patet.

PROP. VII.

Si in sectione conica inscribantur duæ rectæ, non inter se parallelæ, & termini ipsarum quatuor rectis jungantur; harum intersectiones, & duæ intersectiones contingentium quæ per terminos utriusque inscriptæ ducuntur, erunt omnes quatuor in recta linea.

Sint AC, BD duæ rectæ sectioni inscriptæ, quæ inter se conveniant in E; & junctæ AD, BC occurrant in F, junctæ vero AB, DC occurrant in G; & contingentes per A, C ductæ occurrant sibi mutuo in H, quæ vero per B, D ducuntur occurrant in K: erunt quatuor puncta F, G, H, K in recta linea. Fig. 9. n. 1, 2.

Jungatur enim FG, cui occurrant AC, BD in LM: &, quoniam quadrilaterum est ABCDFG, & duæ ipsius diagonales sunt AECL, BEDM, tertiæ occurrentes in L, M, erunt ipsæ AL, BM (per Lemma) harmonicè sectæ, in E, C & E, D; quare (per Cor. 3. 5. huj.) erunt puncta L, M, & occursus contingentium H, K, in recta linea: sed L, M sunt in recta FG; ergo H, K sunt in eadem.

PROP. VIII. *Apollon.* XXX. *lib.* 3.

Si duæ rectæ lineæ Hyperbolam contingentes sibi ipsis occurrant, & per contactus recta producatur; per occursum vero ducatur recta uni asymptotôn parallela, & sectionem & rectam jungentem contactus secans: quæ interjicitur inter occursum & rectam contactus jungentem a sectione bifariam dividetur.

Sit Hyperbola ABC, quam contingant rectæ lineæ AD, DC; asymptoti vero sint EF, FG; &, junctâ AC, ducatur per D recta DKL, parallela ipsi FE: dico DK ipsi KL æqualem esse. Fig. 12.

Jungatur enim FDBM, & ex utraque parte producatur, ut sit

FH æqualis ipsi FB; & per B, K ducantur BE, KN parallelæ ipsi AC, quæ ordinatim applicatæ erunt (Cor. 2. 1. lib. 4.): & quoniam triangulum FEB simile est (4. 6.) triangulo DKN, erit (per 22. 6.) ut quadratum ex DN ad quadratum ex NK, ita (quadratum ex BF ad quadratum ex BE, hoc est, per 28. lib. 3. & Def. 11. lib. 3. ut) rectangulum HNB ad quadratum ex NK; ergo rectangulum HNB quadrato ex DN est æquale. Est autem (per 33. lib. 3.) rectangulum MFD æquale quadrato ex FB, propterea quod recta AD sectionem contingit, & AM ordinatim est applicata: quare rectangulum HNB, una cum quadrato ex FB, æquale est rectangulo MFD una cum quadrato ex DN. Sed (6. 2.) rectangulum HNB una cum quadrato ex FB est æquale quadrato ex FN; ergo & rectangulum MFD una cum quadrato ex DN æquale est quadrato ex FN: & (*a*) idcirco recta DM ad punctum N bifariam secatur, adjunctam habens DF. Et parallelæ sunt KN, LM; recta igitur DK (per 2. 6.) ipsi KL est æqualis.

FIG. 12. COR. Iisdem manentibus, si per occursum contingentium D ducatur recta DO, jungenti contactus parallela; perque punctum M, quo bifariam secatur AC, ducatur alia alteri asymptotôn EF parallela: recta MQ, quæ inter punctum M & rectam parallelam DO interjicitur, a sectione bifariam dividetur.

Occurrat enim MQ sectioni in P, & per D ducatur DKL, ipsi MQ parallela, occurratque sectioni in K & ipsi AC in L: est igitur, per hanc Propositionem, DK æqualis ipsi KL; quare, junctâ KP, parallela erit AC. Non enim; sed, si fieri potest, sit KRS ipsi AC parallela, quæ occurrat rectæ MQ in R, sectioni in S, & diametro FM in T: quoniam igitur parallelæ sunt KT, LM, & æquales sunt DK, KL, æquales erunt DT, TM; ideoque (26. 1.) æqualia sunt triangula æquiangula KTD, RTM, & ipsæ KT, TR æquales erunt: est autem KTS ordinatim applicata diametro FM; quare æquales sunt KT, TS: æquales igitur sunt TR, TS; quod fieri

FIG. 12. n. 2. (*a*) Sequitur hoc per Lemma 7. Pappi in lib. 3. *Conicorum* Apoll. scil. Sit rectangulum BAC una cum quadrato ex CD æquale quadrato ex DA; dico DC ipsi DB æqualem esse.

Fiat enim DE æqualis ipsi DA, & commune auferatur quadratum ex CD, & rectangulum BAC æquale erit (per 5. 2.) rectangulo ACE; est igitur BA æqualis ipsi CE: quare æquales sunt AC, BE; ideoque & DC, DB.

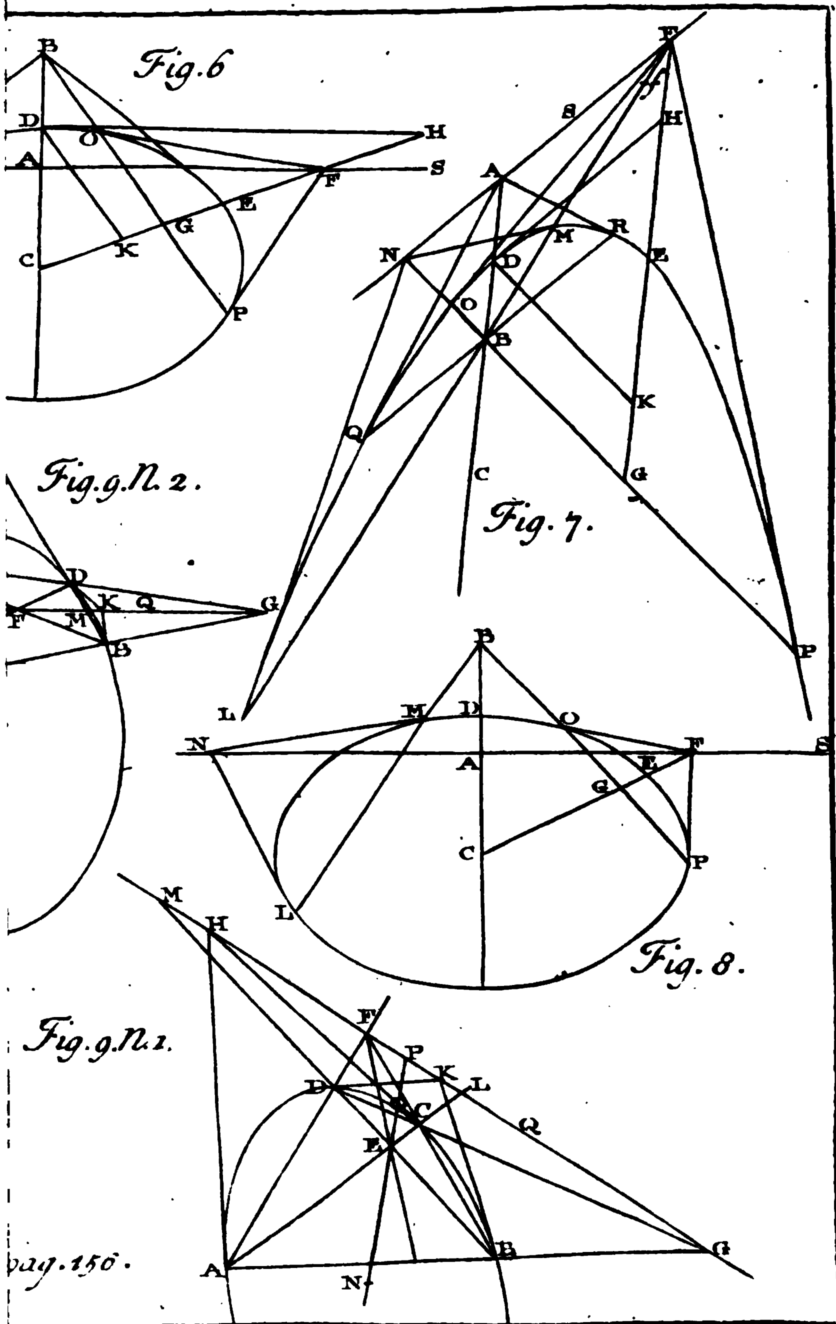


Fig. 6

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9 N. 2.

Fig. 9 N. 1.

pag. 156.

fieri non potest. Non igitur est KS parallela ipsi AC; quare KP ipsi est parallela, & æquales sunt DK, KL: ergo æquales sunt QR, PM.

PROP. IX.

Si duæ rectæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant, & per contactus recta producatur; per occursum vero ducatur recta asymptoto parallela, quæ sectionem & rectam contactus jungentem secat: recta, inter occursum & eam quæ contactus junget interjecta, a sectione bifariam dividetur.

Contingant sectiones oppositas rectæ AC, BC in punctis A, B, junctaque AB producatur; asymptotos vero sit DE, & per C ducatur CFG ipsi DE parallela: erit CF æqualis ipsi FG. Fig. 13.

Ducatur enim per centrum D recta CD quæ occurrat ipsi AB in H, & Hyperbolæ conjugatæ in L; & ipsi AB ducatur LE parallela occurrens asymptoto in E, & FK sit diametro CD ordinatim applicata, ideoque ipsi AB parallela.

Quoniam igitur similia sunt triangula CKF, DLE, erit quadratum ex CK ad quadratum ex KF, ut (quadratum ex DL ad quadratum ex LE, hoc est [per 29. & Def. 11. lib. 3.] ut) summa quadratorum ex KD, DL ad quadratum ex KF; ergo quadratum ex CK æquale est quadratis ex KD, DL. Est autem quadratum ex DL æquale rectangulo CDH (per 33. lib. 3.) quare quadratum ex CK æquale est quadrato ex KD & rectangulo CDH simul: ac (a) propterea recta CH in partes quidem æquales secatur ad punctum K, in partes vero inæquales ad D. Et GH parallela est ipsi FK; ergo (2. 6.) CF ipsi FG æqualis erit.

Cor. Iisdem manentibus, si per occursum C ducatur recta CM jungenti contactus parallela; perque punctum H quo bifariam secatur jungens contactus, ducatur alia alteri asymptotôn parallela: recta HO quæ inter dictum punctum & rectam parallelam CM inter-

(a) Sciz. per Convers. 5. 2. seu Pappi Lemma 8. in lib. 3. *Conic.* Apoll. quod eodem modo demonstratur quo præcedens Lemma 7.

terjicitur a sectione bifariam dividetur in N. Demonstratur eodem prorsus modo ex hac Propositione quo Corollarium 8. ex ipsa.

PROP. X.

Si in una asymptotôn Hyperbolæ aliquod punctum sumatur, ab eoque recta ducta sectionem contingat, & per tactum ducatur asymptoto parallela; quæ per dictum punctum transit alteri asymptotôn parallela a sectione bifariam dividetur.

Fig. 14. SIT Hyperbola AB, asymptoti vero CD, DE, &, sumpto in recta CD quovis puncto C, per ipsum ducatur CBE sectionem contingens; & per B quidem ducatur FBG parallela ipsi CD, per C autem CAG quæ ipsi DE parallela sit: erit recta CA æqualis ipsi AG.

Ducatur enim per A recta AH parallela ipsi CD; & per B recta BK parallela ipsi DE: itaque quoniam (per 23. lib. 3.) CB æqualis est BE; erit (per 2. 6.) CK ipsi KD æqualis; est autem rectangulum ACD æquale ipsi BKD (per Cor. 1. 16. lib. 3.) ut igitur CD ad DK, ita est BK, hoc est, GC ad CA; sed est CD dupla DK, quare & GC dupla est ipsius CA; ideoque recta CA æqualis est ipsi AG.

PROP. XI. *Apollonii* XXXV. & XXXVI. *lib.* 3.

Si a puncto in asymptoto Hyperbolæ ducatur recta sectionem contingens, & per contactum ducatur asymptoto parallela; a puncto vero in asymptoto ducatur recta sectionem vel sectiones in duobus punctis secans: segmenta hujus inter punctum in asymptoto, & puncta quibus sectioni occurrit, rationem habebunt eandem quam segmenta ejusdem inter punctum quo parallelæ occurrit eademque sectionis puncta.

Fig. 15, 16. SIt Hyperbola AB, cujus asymptoti CD, DE, & ipsam contingat CBE in B, ipsi vero DC parallela sit BG; ducatur autem per

per C recta CAGF quæ sectionem vel sectiones secat in A, F, parallelæ vero occurrat in G: erit FC ad CA, ut FG ad GA.

Ducantur enim ad CB rectæ AH, FK, ipsi BG seu DC parallelæ; & quoniam AH, FK, quæ uni asymptoton parallelæ sunt, occurrunt contingenti CB, erit (per Cor. 2. 26. lib. 4.) quadratum ex KB ad rectangulum FKC, ut quadratum ex BH ad rectangulum AHC; &, permutando, est quadratum ex KB ad quadratum ex BH, ut rectangulum FKC ad rectangulum AHC; hoc est (per 22. 6.) ut quadratum ex KC ad quadratum ex HC; ergo est quadratum ex KC ad quadratum ex HC, ut quadratum ex KB ad quadratum ex BH; ideoque (per 22. 6.) latera ipsorum proportionalia sunt; quare propter parallelas est FC ad CA, ut FG ad GA.

PROP. XII.

Si recta linea sectionem conicam in duobus punctis secans, occurrat duabus contingentibus & rectæ quæ per contactus transit: erit quadratum ex segmento ejus inter punctum quo rectæ per contactus ductæ occurrit, & unam ex contingentibus; ad quadratum ex segmento ipsius inter idem punctum & alteram contingentem, ut rectangulum contentum segmentis ipsius inter puncta quibus sectioni occurrit & primam contingentem, ad rectangulum contentum segmentis inter eadem puncta & reliquam contingentem.

Contingant sectionem rectæ AB, AC in B, C punctis, ipsam autem secet DE in D, E, occurratque ipsis AB, AC & rectæ BC, quæ per contactus transit, in F, G, H: erit quadratum ex HF ad quadratum ex HG, ut rectangulum DFE ad rectangulum DGE. Fig. 17.

Ducatur enim a puncto G, in quo recta DE uni contingentium occurrit, recta GK alteri AB parallela, occurratque ipsi BC in K; quoniam igitur parallelæ sunt BF, GK, quarum BF contingit sectionem, GK vero ducta est a puncto in alia contingenti AC, ipsi BF parallela, atque ad rectam BC quæ per contactus transit, sectionem vero secat DE: erit (per Cor. 18. lib. 4. vel, si sectio fuerit Parabola, per Cor. 24. lib. 4.) quadratum ex BF ad rectangulum DFE, ut

qua-

quadratum ex GK ad rectangulum DGE; & permutando, ut quadratum ex BF ad quadratum ex GK, ita est rectangulum DFE ad ipsum DGE: propter vero similia triangula BHF, KHG, est quadratum ex BF ad quadratum ex GK, ut quadratum ex HF ad quadratum ex HG; ut igitur quadratum ex HF ad quadratum ex HG, ita rectangulum DFE ad rectangulum DGE.

Fig. 17. Cor. 1. Hinc, si positione datæ sint duæ rectæ AB, AC sectionem conicam contingentes, dataque sint duo puncta D, E in sectione; dabitur punctum H in quo recta DE per data puncta ducta occurrit ei quæ per contactus B, C transit. Nam propter data puncta D, E, positione datur recta DE (26. Dat.), ideoque puncta F, G quibus positione datis AB, AC occurrit (25. Dat.) & propterea data sunt rectangula DFE, DGE, ipsorumque ratio; ergo per hanc Propositionem datur ratio quadratorum ex HF, HG, data proinde est ratio FH ad HG, & datur FG positione & magnitudine, quare (per 5. aut 7. Dat.) datur FH magnitudine, ideoque datum est punctum H (per 27. Dat.)

Cor. 2. Et si datum fuerit tertium punctum in sectione, similiter ostendetur datum esse aliud punctum in recta BC quæ per contactus transit; dabitur proinde BC positione, quare & puncta contactus B, C data erunt.

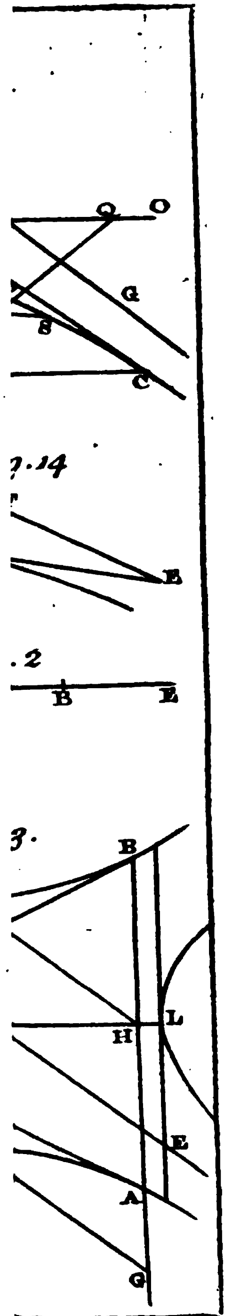
His autem Corollariis continetur demonstratio universalis Prop. 24. lib. 1. Phil. Nat. Princ. Math. quæ hactenus ex accidente tantum ostensa est.

PROP. XIII.

Si Ellipsin aut Hyperbolam aut Hyperbolas oppositas contingentes tres rectæ inter se conveniant: quævis ipsarum harmonice secabitur, scil. in puncto contactus, & punctis quibus occurrit reliquis contingentibus & rectæ quæ contactus ipsarum jungit.

Fig. 18. Contingant sectionem rectæ AB, AC, GDF in B, C, D punctis, & sibi ipsis conveniant in A, F, G; juncta vero BC occurrat ipsi GF in H: erit GH ad HF, ut GD ad DF.

Ducatur enim a puncto G, in quo recta GF uni contingentium oc-



Q O
G
S
C
.14
E
.2
B E
3.
B
L
H
E
A
G

occurrit, recta GK alteri AB parallela, occurratque ipsi BC in K; & ut in præcedente ostendetur esse quadratum ex BE ad quadratum ex FD, ut quadratum ex GK ad quadratum ex GD; & permutando, & per 22. 6. erit BE ad GK, ut FD ad DG; est autem, propter parallelas, BE ad GK, ut HF ad HG; ut igitur HF ad HG, ita FD ad DG.

PROP. XIV. Apollon. XLII. lib. 3.

Si in Ellipsi, Hyperbola vel oppositis sectionibus, ab extremitatibus diametri, quæ in Hyperbola sit transversa, ducantur rectæ parallelæ ordinatim diametro applicatæ, seu, quod idem est, sectionem contingentes; & alia quæpiam recta sectionem quomodocunque contingens ducatur; abscindet ex ipsis rectas continentes rectangulum æquale quadrato ex semidiametro quæ priori conjugata est.

Sit aliqua prædictarum sectionum, cujus diameter AB, atque a punctis A, B ducantur rectæ AC, BD parallelæ ei quæ ordinatim applicata est; & alia quæpiam recta CED in puncto E sectionem contingat; sitque FG semidiameter ipsi AB conjugata, hoc est, ipsis AC, BD parallela: erit rectangulum contentum abscissis AC, BD æquale quadrato ex FG. Fig. 19.

Si in Ellipsi contingens CED parallela fuerit ipsi AB, propositio per se manifesta est; sed non sit parallela, ipsique AB occurrat in K, occurrat vero FG contingenti CD in H; & per E ducatur recta quidem EL ipsi AC parallela, EM vero ipsi AB. Quoniam igitur (per Cor. 2. 17. lib. 2. & 35. lib. 3.) est rectangulum BKA æquale rectangulo FKL; erit BK ad KF, ut LK ad KA: ergo ut BD ad FH, ita EL ad CA; & propterea rectangulum contentum ipsis DB, CA æquale est ei quod ipsis FH, EL continetur, hoc est, rectangulo HFM; rectangulum autem HFM æquale est (per 17. lib. 2. & 33. lib. 3.) quadrato ex FG; rectangulum igitur contentum ipsis BD, AC eidem quadrato ex FG est æquale.

Cor. Iisdem manentibus, erit rectangulum DEC, contentum Fig. 19.

segmentis contingentis, inter contactum & parallelas, æquale quadrato ex semidiametro FP conjugata ipsi FE quæ per contactum transit.

Nam quoniam contingentes parallelæ BD, AC occurrunt tertiæ contingenti DEC, erit (per 15. lib. 4.) quadratum ex BD ad quadratum ex DE, ut quadratum ex AC ad quadratum ex CE; ergo (22. 6.) proportionales sunt BD, DE, AC, CE, ideoque similia sunt rectangula contenta BD, AC, & DE, EC; quare (per 22. 6.) est BD in AC ad DEC rectangulum, ut (quadratum ex BD ad quadratum ex DE, hoc est [per 14 lib. 4] ut) quadratum ex FG ad quadratum ex FP. Et est rectangulum BD in AC æquale quadrato ex FG per hanc Propositionem, ergo rectangulum DEC æquale est quadrato ex FP.

Et si fuerit BA axis Ellipseos vel axis transversus Hyperbolæ, & a centro & contactu ducantur FN, EO ad rectos angulos contingenti DC; erit rectangulum contentum ductis FN, EO æquale quadrato ex semiaxe conjugato FG. Nam propter parallelas erunt triangula rectangula FNH, ELO similia; quare ut FN ad FH, ita EL ad EO, ideoque rectangulum FN in EO æquale est ipsi FH in EL, hoc est, quadrato ex FG.

PROP. XV. *Apollonii XLI. lib. 3.*

Si Parabolam contingentes tres rectæ inter se conveniant; in eadem ratione secabuntur, scil. inter ipsarum occursus & puncta contactus.

Fig. 20, 21, 22. Sit Parabola ABC, quam rectæ ADE, EFC, DBF contingant: erit ut CF ad FE, ita ED ad DA, & FB ad BD.

Fig. 20. Conjungatur enim AC, & bifariam in G dividatur: perspicuum est (per Cor. 1. 1. lib. 4) rectam quæ ab E ducitur ad G, sectionis diametrum esse. Si igitur EG per B transit, erit (Cor. 5. 11. lib. 1.) recta DF parallela ipsi AC, & ab EG bifariam in puncto B secabitur: & est GB æqualis ipsi BE (14. lib. 1.) ergo AD ipsi DE, & EF ipsi FC æqualis erit: constat igitur verum esse quod proponebatur.

Fig. 21, 22. Sed non transeat EG per B, & junctis AB, BC, per puncta D, B, C ducantur, diametro EG parallelæ, rectæ DHK, BN, FLM:

quo-

quoniam igitur est DH diameter, & sectionem contingunt DA, DB erunt AH, HB æquales (Cor. 2. 1. lib. 4.); ideoque æquales sunt AK, KN (2. 6.) & AN dupla erit ipsius NK; eadem ratione erit NC dupla ipsius NM, ergo summa vel reliqua AC dupla est summæ vel reliquæ KM; sed & AC dupla est ipsius GC, quare æquales sunt KM, GC, ideoque & ipsæ KG, MC: est igitur AG ad GK, ut GC ad CM; & dividendo in fig. 21. in fig. vero 22. componendo est AK ad KG, ut GM ad MC: ergo propter parallelas est AD ad DE, ut EF ad FC. Et eodem prorsus modo ostendetur esse AD ad DE, ut DB ad BF.

PROP. XVI.

Si a puncto in recta Parabolam contingente ducatur recta ipsam in duobus punctis secans, & per contactum ducatur diameter: erit rectangulum contentum segmentis rectæ secantis, inter punctum in contingente & puncta quibus sectioni occurrit, æquale quadrato ex segmento ejusdem inter idem punctum & diametrum.

Contingat AB Parabolam in A, & a puncto in contingente B ducatur BCD sectioni occurrens in C, D & diametro per A ductæ in E: erit rectangulum CBD æquale quadrato ex BE. Fig. 23.

Secetur enim CD bifariam in F, & ducatur diameter FG Parabolæ occurrens in G; ad diametrum vero AE ducatur a puncto G rectæ GK, GL, ipsis CD, AB parallelæ, occurratque GK ipsi AB in H: quoniam igitur GK parallela est ipsi CD quæ ordinatim applicata est ipsi FG, continget GK Parabolam (Con. 5. 11. lib. 1.) & quoniam GL parallela est contingenti AB, ordinatim applicata erit diametro AE; ideoque (per 14. lib. 1.) æquales erunt LA, AK; æquales igitur sunt GH, HK: quoniam vero contingens BAH occurrit duabus rectis parallelis BCD, HG, quarum BD secat, HG vero Parabolam contingit; erit (per 23. lib. 4.) quadratum ex AB ad rectangulum CBD, ut quadratum ex AH ad quadratum ex HG, seu HK; est autem, propter parallelas, quadratum ex AH ad quadratum ex HK, ut quadratum ex AB ad quadratum ex BE; quare est quadratum ex AB ad rectangulum CBD, ut idem quadratum ex

AB ad quadratum ex BE: ideoque rectangulum BCD æquale est quadrato ex BE.

PROP. XVII.

Si duæ rectæ inter se convenientes, Parabolam secent, & a punctis, in quibus ipsarum una sectioni occurrit, ducantur ad reliquam duæ rectæ diametris parallelæ; erit rectangulum contentum segmentis reliquæ inter rectarum occursum & Parabolam, æquale rectangulo contento segmentis ejusdem inter eundem occursum & parallelas.

Fig. 24, 25, 26. SIt Parabola AB, ipsamque secent rectæ ABC, CDE, a punctis vero A, B ducantur ad CD rectæ AG, BF diametris parallelæ: erit rectangulum DCE æquale rectangulo FCG.

Ducatur enim BH parallela ipsi CE, occurratque Parabolæ in H, & ad CE ducatur HK ipsi AG parallela. Quoniam igitur parallelæ sunt DE, BH in Parabola, diameter quæ unam ex ipsis bifariam secat bifariam secabit alteram (Cor. 3. 11. lib. 1.) quare æquales sunt DF, KE, ideoque, in fig. 24. erit (per Lemma Pappi in pag. 32. huj.) rectangulum DGE æquale rectangulis DFE, FGK simul: in fig. vero 25. erit (per idem Lemma) rectangulum FGK æquale rectangulis DFE, seu KDF, & DGE simul: in fig. autem 26. similiter ostendetur rectangulum DGE æquale esse rectangulis DFE, seu DKE & FGK simul. Est autem (per Cor. 1. 21. lib. 4.) rectangulum DFE ad DGE, ut (FB ad GA, hoc est, ut) FC ad CG, ergo dividendo inversè in fig. 24, 26, componendo vero in fig. 25. erit FGK rectangulum ad ipsum DGE, ut (FG ad GC, hoc est, ut) FGK rectangulum) ad CGK: quare rectangulum DGE æquale est ipsi CGK, ideoque ut DG ad GC, ita KG ad GE; &, dividendo inversè in fig. 24, 26, dividendo vero in fig. 25, erit DC ad CG, ut KE, seu FD, ad GE; ergo per 12. 5. in fig. 24, 25, & per 19. 5. in fig. 26, est DC ad GC, ut CF ad CE, ideoque rectangulum DCE æquale est rectangulo GCF.

Fig. 24, 25, 26. Cor. Hinc, si in Parabola data fuerint quatuor puncta A, B, D, E, positione dabuntur diametri quæ per ipsa transeunt: junctæ enim AB, DE occurrant sibi ipsis in C, & per hanc Propositionem erit

GCF

GCF rectangulum æquale ipsi DCE: datum autem est DCE; quare datur GCF magnitudine, & ratio GC ad CF æqualis est rationi datæ AC ad CB, ideoque specie datur GCF: latera igitur GC, CF magnitudine dantur, (per 55. Dat.) & positione datur GC & punctum C, quare puncta G, F data sunt, (27. Dat.) & data sunt A, B puncta; ergo diametri AG, BF positione dantur. Et compositio facile fit per 25. 6. applicando scil. ad rectam CE rectangulum ipsi ACB simile, rectangulo vero DCE æquale. Et quoniam applicatio duplici modo fieri potest, scil. vel ad partes versus punctum E, vel ad partes iisdem contrarias; ideo duplex erit positio diametrorum, duæque proinde Parabolæ quæ per quatuor puncta data transeunt: excepto casu in quo rectangulum DCE ipsi ACB est simile. Nam, si fuerit, erit AC ad CB, ut EC ad CD, junctæque BD, AE essent inter se parallelæ; quare in hoc casu unica tantum Parabola describi poterit, cujus scil. diameter bifariam secat parallelas BD, AE. Fig. 27.

PROP. XVIII. *Quæ est IV. Archimedis de Quadratura Parabolæ.*

Sit segmentum comprehensum recta AC & Parabola ABC, recta vero DB a medio ipsius AC parallela diametro ducatur, aut ipsa diameter *segmenti* sit; & juncta recta BC producatur: quod si ducatur altera quæpiam EF ipsi BD parallela, secans utramque ipsarum AC, CB *in* E, F, & *Parabolam in* G, eandem rationem habebit EF ad FG, quam AD ad DE. Fig. 28, 29.

Ducatur enim per G, ipsi AC parallela, GHK; est igitur, ut BD ad BH, ita quadratum ex DC ad quadratum ex HG, *seu* DE; hoc enim demonstratum est (Cor. 2. 12. lib. 1.) erit igitur, *propter parallelas*, ut BC ad BK, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BF; *quare proportionales sunt* BC, BF, BK (Cor. 20. 6.) adeo ut (per 19. 5.) eandem habet rationem BC ad BF, quam CF ad FK: est igitur, *propter parallelas*, ut CD ad DE, ita FE ad FG; æqualis autem est DC ipsi DA. Manifestum igitur est, eandem habere rationem DA ad DE, quam EF ad FG.

PROP.

PROB. XIX.

Si a duobus punctis in Parabola inflectantur ad tertium quodlibet in ipsa punctum duæ rectæ, quæ diametro cuivis occurrant, eidemque occurrat recta per puncta a quibus inflexæ sunt rectæ transiens; segmenta diametri inter verticem ejus & inflexas eandem habebunt rationem, quam segmenta rectæ, quæ per puncta transit, inter eadem puncta & illud quo diametro occurrit.

Fig. 30. Sint A, B puncta in Parabola, a quibus inflectantur ad tertium in ipsa punctum C rectæ AC, BC diametro DF occurrentes in D, E, sitque F vertex diametri, & juncta AB ipsi occurrat in G: erit DF ad FE, ut AG ad GB.

Per punctum C ducatur diameter CH, cui ordinatim applicatæ sunt AHL, BKM, quæ ipsi DE occurrant in N, O punctis. Quoniam igitur ducta est AC per verticem C diametri CH, cui ordinatim applicata est AL, & ipsis AL, AC occurrat ND, quæ ipsi CH parallela est; erit, per Prop. præced: ND ad DF, ut LH ad HN: &, dividendo, est NF ad DF, ut LN ad NH; ideoque rectangulum contentum DF, LN æquale erit contento NF, NH. Et, eadem ratione, quoniam BC ducta est per verticem C segmenti BCM, erit OE ad EF, ut BK ad KO; &, componendo, est OF ad EF, ut MO ad KO, ideoque rectangulum contentum EF, MO æquale est contento OF, KO: ergo est rectangulum contentum DF, LN ad contentum EF, MO, ut rectangulum contentum NF, NH ad contentum ipsis OF, KO, hoc est, (1. 6.) propter NH, KO æquales, ut recta NF ad ipsam OF: est autem (per Cor. 1. 21. lib. 4.) NF ad OF, ut rectangulum ANL ad ipsum BOM; quare est rectangulum contentum DF, LN ad contentum EF, MO, ut rectangulum ANL ad ipsum BOM: &, permutando, &, propter communes altitudines, rursusque permutando, est DF ad EF, ut (AN ad BO, hoc est, propter parallelas, ut) AG ad GB.

Est hæc Propositio quam Dom. Fermat Wallisio demonstrandam proposuit in epistola ad Dom. Kenelm. Digby, (vid. p. 858. Tom. 2. Oper. Math. Wallisii.

Cor.

Cor. 1. Hinc, si positione data sit diameter FG, & duo puncta in Parabola A, B, dabitur ratio AG ad GB, ideoque ratio DF ad FE. Fig. 30.

Cor. 2. Et si præterea detur recta AD positione, punctumque F, dabitur DF magnitudine, & proinde FE, punctumque E: quare positione dabitur BE, & punctum Parabolæ C. Atque eodem modo quotcunque quis voluerit in ipsa puncta inveniri possunt.

PROP. XX.

Si recta linea Ellipsin aut Hyperbolam contingat, & a contactu ducantur duæ rectæ ad axem in quo sunt foci, quarum una perpendicularis sit ad axem, altera vero ad rectos angulos sit contingenti: erit segmentum axis inter centrum & perpendicularem ad axem, ad segmentum ejusdem inter perpendicularem & rectam quæ contingenti est ad angulos rectos, ut axis ad ipsius latus rectum.

Sit Ellipsis aut Hyperbola, cujus axis, in quo sunt foci, sit AB, Fig. 19. & centrum F, & contingat sectionem recta EK axi occurrens in K, sitque EL perpendicularis ad axem, EO vero ad rectos angulos ipsi EK; erit FL ad LO, ut AB ad ipsius latus rectum.

Nam est rectangulum ALB ad quadratum ex EL (per 22. lib. 2. & 47. lib. 3.) ut AB ad ipsius latus rectum; &, quoniam est angulus OEK rectus, erit quadratum ex EL æquale rectangulo OLK: rectangulum vero ALB æquale est (per Cor. 1. 17. lib. 2. & 35. lib. 3.) ipsi FLK; est igitur, ut (FLK rectangulum ad OLK, hoc est, ut) FL ad LO, ita AB ad ipsius latus rectum.

PROP. XXI.

Si a puncto Parabolæ ducantur ad axem duæ rectæ, quarum una sit ad ipsum perpendicularis, altera vero ad rectos angulos sit rectæ quæ Parabolam in isto puncto contingit; segmentum axis ductis interceptum æquale erit dimidio lateris recti axis.

Fig. 31. Sit Parabola, cujus axis AB, vertex A, ipsius vero latus rectum æquale sit rectæ AG, cujus dimidium sit AH; & ipsam contingat CF in C; sit vero CD perpendicularis ad axem, & CE ad rectos angulos ipsi CF: erit DE æqualis dimidio lateris recti axis.

Nam, quoniam rectus est angulus ECF, erit (per Cor. 8. 6. & 17. 6.) rectangulum EDF æquale quadrato ex CD, hoc est, (per 12. lib. 1.) rectangulo DAG, & est DF (per 19. lib. 1.) æqualis ipsi DA bis; ergo rectangulum EDA bis æquale est rectangulo DAG, hoc est, ipsi DAH bis: quare recta ED æqualis est ipsi AH.

PROP. XXII.

Si a foco sectionis conicæ ducatur ad sectionem recta axi ad angulos rectos, erit ea æqualis dimidio lateris recti axis.

Fig. 31. PRimo, Sit sectio Parabola, cujus axis AB, vertex A, focus B, & BK ad angulos rectos ipsi AB; sitque AG æqualis lateri axis recto, & AH ejusdem dimidium: &, quoniam BA dimidium est ipsius AH, (Cor. 1. lib. 1.) proportionales erunt BA, AH, AG; ergo quadratum ex AH æquale est rectangulo GAB, hoc est, (per 12. lib. 1.) quadrato ex KB, quare æqualis est BK ipsi AH.

Fig. 19. Secundo, Sit sectio Ellipsis aut Hyperbola, cujus focus R, axis AFB, & RQ ipsi ad rectos angulos; sit vero AS æqualis dimidio lateris recti axis: erit RQ æqualis ipsi AS. Sit enim FG semiaxis secundus conjugatus ipsi AF: &, quoniam est quadratum ex QR ad rectangulum ARB, hoc est, (per 2. lib. 2. & 4. lib. 3.) quadratum ex FG, ut quadratum ex FG ad quadratum ex AF, proportionales erunt AF, FG, RQ; ergo est RQ æqualis ipsi AS, (per Def. 9. lib. 2. & Def. 12. lib. 3.)

PROP. XXIII.

Fig. 32. Si Ellipsin aut Hyperbolam contingat recta FK, & a contactu F ducatur FD ad focum, a centro vero ducatur ad contingentem recta CG ipsi FD parallela: erit CG æqualis dimidio axis AB in quo sunt foci.

Ducatur

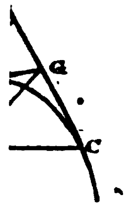
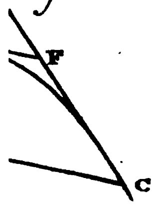
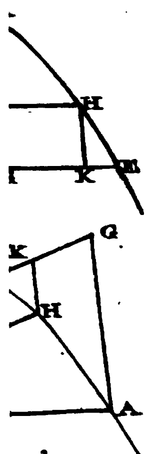


Fig. 20.





108.

DUcatur enim FE ad alterum focum, & juncta EG producatur, & occurrat ipsi DF in H. Quoniam igitur parallelæ sunt DH, CG, & æquales sunt EC, CD, æquales erunt EG, GH; &, quoniam sectionem contingit FG, erunt anguli EFG, HFG æquales (per Cor. 11. lib. 2. & 36. lib. 3.); quare (per. 3. 6.) est EF ad FH, ut EG ad GH; æquales autem sunt EG, GH, ergo æquales sunt EF, FH; recta igitur DH æqualis est ipsis DF, DE simul, hoc est, axi AB: quoniam vero EC dimidium est ipsius ED, erit CG æqualis dimidio ipsius DH, seu axis AB, (4. 6.)

PROP. XXIV.

Si recta DL sectionem conicam contingat, & a contactu D ducatur recta DE ad focum E, & DG ad rectos angulos contingenti, occurrens diametro AB, quæ per focum transit, in G; a puncto vero G ducatur ad DE perpendicularis GH: abscindet hæc ex DE segmentum DH æquale dimidio lateris recti axis AB. Fig. 33, 34.

IN Ellipsi aut Hyperbola, ducatur a centro ad contingentem recta CK ipsi perpendicularis, & CL ipsi DE parallela; sitque CM semiaxis conjugata ipsi CA: &, quoniam CK, CL parallelæ sunt rectis DG, DH, æquales erunt anguli KCL, HDG, ideoque æquiangula sunt triangula rectangula CKL, HDG; quare rectangulum CL in DH æquale est rectangulo contento ipsis CK, DG, hoc est, (per Cor. 14. huj.) quadrato ex CM: quadratum vero ex CM æquale est, per Definitionem lateris recti & 17. 6. rectangulo contento AC & dimidio lateris recti axis AB; ergo rectangulum CL in DH æquale est contento AC & dimidio lateris recti: est autem (per 23. huj.) CL æqualis ipsi CA; quare DH æqualis est dimidio lateris recti. Fig. 33.

In Parabola vero, ducatur per D diameter DC, & ad axem AB perpendicularis sit DF: &, quoniam KDL Parabolam contingit, & est ducta DE ad focum, æquales erunt anguli ADL, CDK; igitur æqualis est angulus EDG ipsi GDC, hoc est, alterno DGE: quare æquiangula sunt triangula rectangula HDG, FGD, & habent latus DG commune; æqualia igitur sunt triangula, ideoque est DH æqualis ipsi FG, hoc est, dimidio lateris recti axis (21. huj.) Fig. 34.

PROP. XXV.

In Ellipsi aut Hyperbola, si ab extremo axis, in quo sunt foci, rectæ ad rectos angulos ducantur; & ducatur recta sectionem contingens, occurrensque iis quæ sunt ad rectos angulos: rectæ, quæ ab occursibus ducuntur ad focos, angulos rectos ad ipsos efficient.

Fig. 35. Sit Ellipsis aut Hyperbola, cujus axis ACB, & foci D, E, & occurrat recta GFH, quæ sectionem in F contingit, ipsis AG, BH, quæ ipsi AB ad rectos angulos ducuntur, in G, H; & jungantur GD, HD, & GE, HE: erit uterque angulus GDH, GEH rectus.

Sit enim CM semidiameter secunda ipsi CB conjugata; &, quoniam parallelæ AG, BH sectionem contingunt, tertia vero contingens GFH ipsis in G, H occurrit, erit (per 14. huj.) rectangulum AG in BH æquale quadrato ex CM: eidem vero quadrato æquale est rectangulum ADB, quoniam scil. focus est D; ergo, ut AG ad AD, ita DB ad BH: & sunt circa æquales angulos GAD, HBD; æquiangula igitur sunt GAD, DBH triangula; igitur æquales sunt ADG, BHD anguli: anguli vero BHD, BDH simul conficiunt rectum, quia rectus est EBH; ergo, & ADG, BDH rectum conficiunt, ideoque rectus est GDH, (13. 1.) similiter & angulus GEH rectus ostendetur.

PROP. XXVI. *Apollon.* XLVI. *lib.* 3.

Iisdem positis, rectæ dicto modo junctæ æquales facient angulos ad contingentes.

Fig. 35. Iisdem namque positis, erit angulus AGD angulo HGE, & angulus GHD angulo BHE æqualis.

Quoniam enim ostensum est, in præced. utrumque angulorum GDH, GEH rectum esse, si circa diametrum GH circulus describatur, per puncta D, E transibit (Conversf. 31. 3.); quare (per 21. 3.) angulus HGE æqualis est angulo HDE: angulus autem HDE angulo AGD est æqualis, ut in præced. demonstratum fuit; ergo,

&

& angulus HGE æqualis erit angulo AGD. Eodem modo & angulus GHD angulo BHE æqualis ostendetur.

PROP. XXVII. Apoll. XLIX. lib. 3.

Iisdem positis, si ab aliquo focorum perpendicularis ad contingentem ducatur; quæ a puncto in quo contingenti occurrit ducuntur ad axis utramque extremitatem rectos angulos inter se continebunt.

Ponantur eadem, & a foco D ducatur ad GH perpendicularis DN, & jungantur AN, BN; erit angulus ANB rectus. Fig. 35.

Quoniam enim anguli GAD, GND recti sunt, erunt (per Convers. 22. 3.) puncta A, G, N, D in circulo; eademque ratione erunt B, H, N, D in circulo: quare (per 21. 3.) angulus DNA æqualis est angulo AGD, hoc est, (per 25. huj.) angulo BDH, hoc est, (per 21. 3.) angulo BNH: æquales igitur sunt anguli DNA, BNH, ergo & HND, ANB anguli sunt æquales, & rectus est HND; quare rectus erit ANB. Similiter, junctis AL, BL, erit angulus ALB rectus.

Aliter: Jungatur CL, & occurrat DF ipsi EL in K: quoniam igitur æquales sunt EFL, KFL anguli, & recti sunt qui ad L; in triangulis EFL, KFL erit EL æqualis ipsi LK: & est EC æqualis ipsi CD, ergo parallela est CL rectæ DK; ideoque æqualis erit ipsi CB (per 23. huj.): circulus igitur circa diametrum AB descriptus transibit per L; quare rectus est, in semicirculo, angulus ALB.

PROP. XXVIII.

In Ellipsi aut Hyperbola, si a focis ducantur duæ rectæ ad punctum quodvis in sectione, continebunt rectangulum æquale quadrato ex semidiametro conjugata ei quæ per punctum in sectione transit.

Sit Ellipsis aut Hyperbola, cujus axis ACB, & foci D, E; ducantur vero DF, EF ad punctum quodvis in sectione: erit rectangulum DFE æquale quadrato ex semidiametro conjugata ei quæ transit per F. Fig. 35.

 Ducan-

Ducantur enim AG, BH ad rectos angulos ipsi AB, occurrantque rectæ GH, quæ sectionem in F contingit in G, H; circulus igitur circa diametrum GH descriptus transibit per focos D, E, ut in 26. huj. ostensum fuit; ducatur vero ad GH perpendicularis EL, occurratque ipsi DF in K; &, quoniam æquales sunt anguli LFE, LFK, (per Cor. 11. lib. 2. & 36. lib. 3.) & communis est FL, erit (26. 1.) EL æqualis ipsi LK; diameter igitur circuli GH bifariam & ad angulos rectos secat ipsam EK, & est punctum E in ipsius circumferentia; quare punctum K est in eadem: ergo (per 35. aut 36. 3.) rectangulum DFK, hoc est, DFE, æquale est rectangulo GFH: rectangulum autem GFH (per Cor. 14. huj.) æquale est quadrato ex semidiametro conjugata ei quæ per F transit; ideo rectangulum DFE eidem quadrato est æquale.

PROP. XXIX.

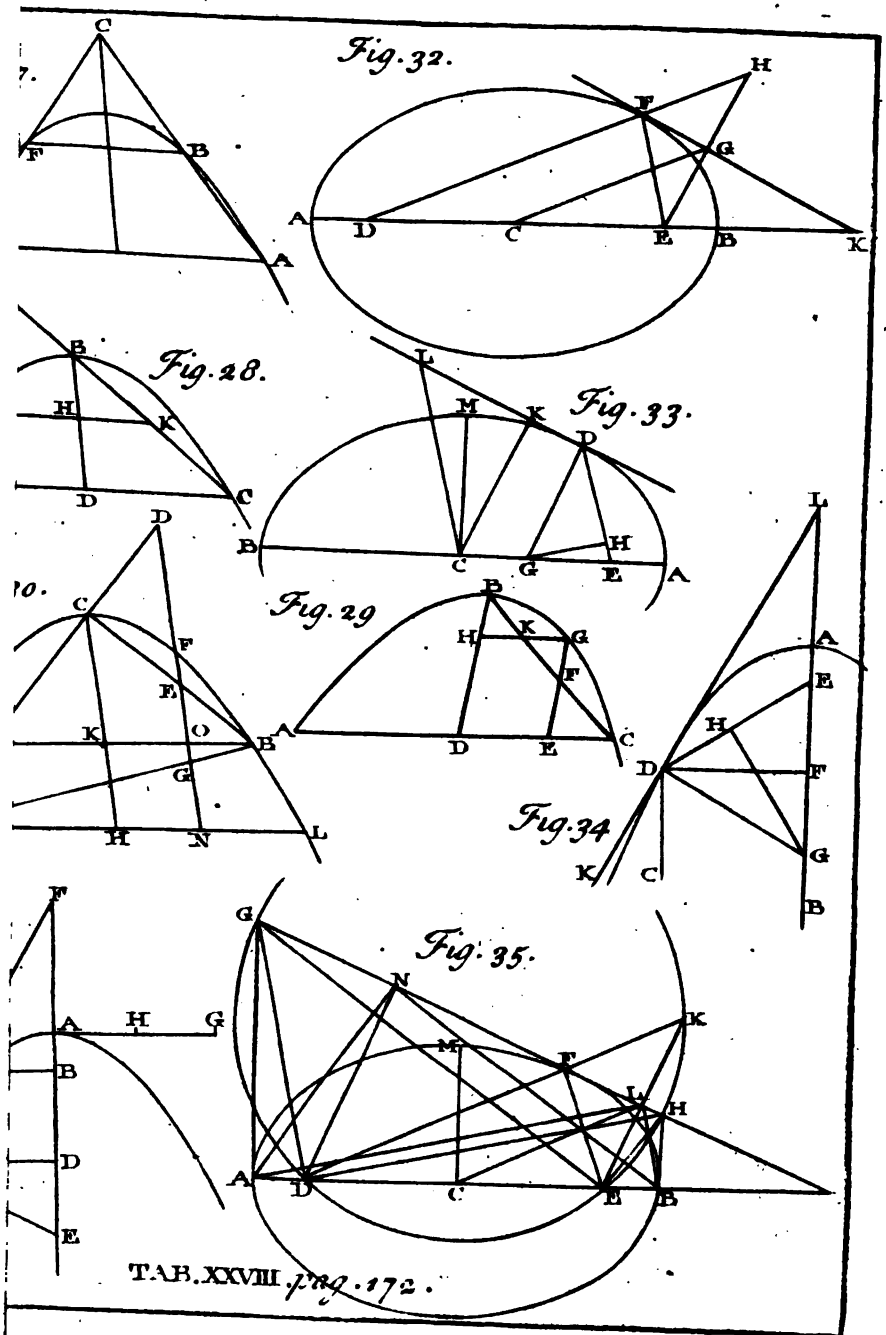
Si in Ellipsi aut Hyperbola ducatur per focum recta sectione utrinque terminata, erit diameter quæ ductæ est parallela media proportionalis inter ductam & axem quæ per focos transit.

Fig. 36. n. 1, 2. SIt Ellipsis aut Hyperbola, cujus axis ACB, & foci D, E; & per alterum ipsorum E ducta sit FEG; sitque HK diameter ipsi FG parallela: erunt AB, HK, FG proportionales.

Ducatur enim a centro recta CM, bifariam secans FG in L; & per F ducatur ad HK recta FN, parallela ipsi CM, & FO sectionem contingens in F: quoniam igitur FG bifariam secta est diametro CM, erit ipsa diametro CM ordinatim applicata; quare CH, quæ ipsi FG parallela est, erit diameter ipsi CM conjugata, & FN ordinatim applicata erit ipsi CH; & sectionem contingit FO, quare proportionales erunt CO, CH, CN (17. lib. 2. & 33. lib. 3.): est autem CO æqualis dimidio axis AB, (per 23. huj.) & CH dimidio ipsius HK, & CN, hoc est, FL, dimidio ipsius FG; ergo proportionales sunt AB, HK, FG.

Cor. Hinc duplum rectanguli FEG, contenti sciz. segmentis rectæ quæ per focum ducitur, æquale est rectangulo contento totâ FG & dimidio lateris recti ipsius AB.

Sit



TAB. XXVIII. pag. 172.

Sit enim recta P æqualis dimidio lateris recti, & quoniam est quadratum ex CH ad quadratum ex CB, (per 10. lib. 4.) ut rectangulum FEG ad rectangulum AEB, hoc est, (per 21. lib. 2. & 4. lib. 3. & Definitionem lateris recti) ad rectangulum contentum rectis CB & P; erit permutando, & per 1. 6. quadratum ex CH ad rectangulum FEG, ut recta CB ad rectam P, hoc est, ut rectangulum CB in FL ad rectangulum P in FL; & per hanc Propositionem est quadratum ex CH æquale rectangulo CB in FL; ergo rectangulum FEG æquale est rectangulo P in FL; quare rectangulum FEG bis æquale est rectangulo P in FG.

PROP. XXX.

In Ellipsi aut Hyperbola si distantiæ foci a centro, & semiaxi, in quo est focus, ponatur in axe a centro tertia proportionalis, & per hujus terminum ducatur recta ad rectos angulos axi; ad hanc autem a puncto quovis in sectione ducatur perpendicularis, & ab eodem puncto ducatur recta ad focum perpendiculari propiorem: erit recta quæ ad focum ducta est ad rectam perpendicularem, ut distantia foci a centro ad semiaxem in quo est focus.

Sit Ellipsis aut Hyperbola, cujus axis ACB, foci D, E; & ipsis CE, CB sit CF tertia proportionalis; per punctum vero F ducta sit FM ipsi CF ad angulos rectos; & ducatur a quovis in sectione puncto G, recta GH ad FM perpendicularis, ad focum vero E ipsi FM propiorem ducatur GE: erit GE ad GH, ut CE ad CB. Fig. 37.

Ducatur enim ad axem recta GK ipsi FH parallela, & fiat BL æqualis ipsi EG. Quoniam igitur (per 4. lib. 2. & 5. lib. 3.) est CE ad CB, ut CL ad CK, & ex hypothesi est CE ad CB, ut CB ad CF; erit CL ad CK, ut CB ad CF; & (per 19. aut 12. 5.) erit LB ad KF, ut (CB ad CF, hoc est, ut) CE ad CB; est autem LB æqualis GE, & KF æqualis ipsi GH; ergo ut GE ad GH, ita est CE ad CB.

Cor. 1. Hinc, si a duobus in sectione punctis ducantur rectæ ad focum.

focum & perpendiculares ad rectam FM, habebunt rectæ ad focum ductæ eandem inter ſe rationem quam perpendiculares.

Fig. 37. Cor. 2. Iiſdem manentibus, ſi per focum E ducatur ad ſectionem recta EN ordinatim ipſi AB applicata, & juncta FN occurrat ipſi KG in O, erit KO æqualis ipſi GE: ducatur enim NP perpendicularis ad FM; eſt igitur per Cor. præced. GE ad GH, ut (NE ad NP, ſeu EF, hoc eſt, ut) OK ad KF, ſeu GH: æquales igitur ſunt GE, OK, & præterea manifeſtum eſt FN ſectionem contingere in N, quoniam ſciz. proportionales ſunt CE, CB, CF.

PROP. XXXI.

Si ſectionem conicam duæ rectæ lineæ contingant, recta, quæ per occurſum contingentium & alterum focorum ducitur, bifariam ſecabit angulum comprehenſum rectis quæ a punctis contactus ad eundem focum ducuntur.

Fig. 38. n. 1, 2. Sit ſectio conica, quam contingunt AB, AC in punctis B, C; ductiſque ad focum D rectis AD, BD, CD, quarum AD junctæ BC occurrat in E: erunt anguli BDE, CDE inter ſe æquales.

Sit enim FD axis, occurratque ſectioni in G; &, in Ellipſi aut Hyperbola ſit F centrum ſectionis, ipſiſque FD, FG tertia proportionalis ſit FH, in Parabola vero ſit GH æqualis ipſi GD; occurrat vero AD ſectioni in K, L punctis, & ducantur KM, LM ſectionem in iiſdem contingentes, occurratque diameter ſectionis per M ducta ſectioni in N, & ipſi KL in O: quoniam igitur ſectionem contingunt KM, LM, erit (per Cor. 2. 1. lib. 4.) KOL ordinatim applicata diametro MN, quare in Ellipſi aut Hyperbola proportionales erunt FO, FN, FM (17. lib. 2. & 33. lib. 3.); in Parabola vero æquales erunt ON, NM (14. lib. 1.), &, ex conſtructione, proportionales ſunt FD, FG, FH in primo caſu, in caſu vero Parabolæ æquales ſunt GD, GH; ergo in utroque caſu juncta MH parallela erit ordinatim applicatis axi FG (per 2. & 3. huj.); quare in Parabola eſt MH directrix (Cor. 1. lib. 1.) in omnibus igitur ſectionibus ductis BP, CQ perpendicularibus ad HM, erit (per Cor. 1. 30. huj. & per 1. lib. 1.) BD ad CD, ut BP ad CQ, hoc eſt, propter parallelas, ut BM ad MC, hoc eſt, (per 1. huj.) ut BE ad CE; ergo

ergo est BD ad CD, ut BE ad EC; ideoque (per 3. 6.) recta DE bifariam secat angulum BDC.

PROP. XXXII.

Si duæ rectæ lineæ sectionem conicam contingant, transeatque recta quæ contactus jungit per focum; erit ipsa ad rectos angulos ei quæ ab occursu contingentium ad focum ducitur. *Est casus præcedentis.*

Sit sectio conica, quam contingunt AB, AC in B, C punctis, junctaque BC transeat per focum D; erit BC ad rectos angulos junctæ AD. Fig. 39.

Non enim sint ADE, BDC sibi invicem ad rectos angulos, sed, si fieri potest, inæquales sint anguli BDE, CDE; & a foco ducatur ad sectionem recta DF faciens angulum FDH ipsi CDE æqualem, & a puncto F ducatur recta FG sectionem contingens, occurratque contingenti AC in G, & ducatur GDH per focum; recta igitur GDH (per præced.) bifariam secat angulum FDC; &, ex constructione, recta ADE eundem bifariam secat, quod fieri non potest; non igitur inæquales sunt anguli BDE, CDE, æquales igitur, & proinde recti erunt.

Aliter autem & directe in hunc modum.

1. Contingant AB, AC Ellipsim aut Hyperbolam in B, C, & ad focum D ducatur AD; sit autem E focus alter, & FDG semiaxis, ipsisque FD, FG tertia proportionalis sit FH, & juncta AH parallela erit ordinatim axi applicatis, ut in præcedente ostensum fuit: occurrat vero axis sectioni rursus in K, & a puncto B ducatur ad HA perpendicularis BL, ad BA vero ducatur DM perpendicularis quæ junctæ EB occurrat in N; & NL jungatur. Quoniam igitur sectionem contingit BA, & ductæ sunt BD, BE ad focos, erit (per Cor. 11. lib. 2. & 36. lib. 3.) angulus MBD ipsi MBN æqualis, quare æqualia sunt (per 26. 1.) triangula rectangula MBD, MBN; & recta BN æqualis erit ipsi BD, ideoque est EN æqualis ipsis EB, BD simul, hoc est axi, KG. Et quoniam proportionales sunt FD, FG, FH, & est AH ad rectos angulos axi, BL vero perpendicularis ad AH, erit (per 30. huj.) BD, hoc est, BN ad BL, ut (FD ad FG, hoc est, ut) ED ad KG, seu EN; & sunt Fig. 40. n. 1.

circa

circa æquales angulos NBL, NED; æquiangula, propterea, sunt triangula NBL, DEN; quare angulus BLN æqualis est angulo END, seu BND, hoc est, ipsi BDN, & propterea in circulo sunt puncta B, N, L, D (Conv. 21. aut 22. 3.); centrum vero hujus erit in recta BM, quæ bifariam & ad rectos angulos secat ipsam ND, sit illud O, & OL jungatur; & quoniam in triangulo BLA rectus est qui ad L angulus, erit ipse reliquis ABL, LAB æqualis, quorum angulus OLB æqualis est ipsi OBL, ergo reliquus ALO reliquo LAO æqualis est, & ipsæ OL, OA æquales; transit igitur circulus per punctum A, ideoque est BA ipsius diameter & angulus BDA in semicirculo rectus.

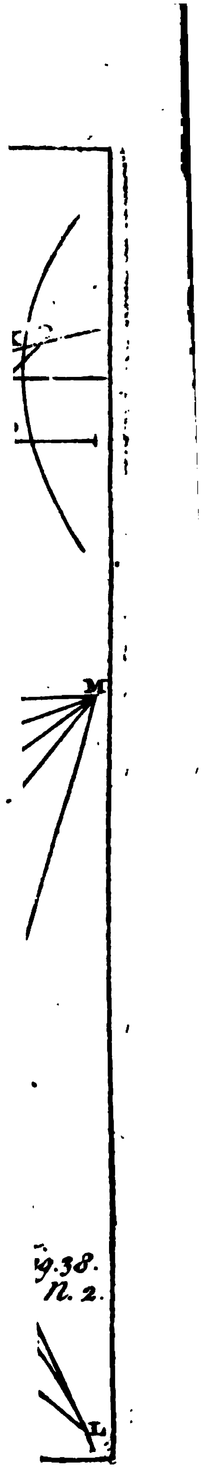
FIG. 40. n. 2. 2. Parabolam contingant AB, AC, & ducatur AD ad focum, sitque DE axis, ipsiusque vertex E, & fiat EF æqualis ipsi ED, junctaque AF erit directrix, ut in præcedente ostensum fuit; ad AF vero ducatur perpendicularis BG, & juncta DG occurrat AB in H: quoniam igitur æquales sunt BD, BG, (1. lib. 1.) communis BH, & æquales anguli HBD, HBG (9. lib. 1.) erunt anguli ad H recti, & DH ipsi HG æqualis, & in triangulis AHD, AHG communis est AH, ergo angulus ADH æqualis est angulo AGH, & est BDH æqualis ipsi BGH; quare angulus ADB æqualis est ipsi AGB, hoc est, angulo recto.

PROP. XXXIII.

Si a vertice axis majoris in Ellipsi, vel axis transversi in Hyperbola, vel axis Parabolæ, ponatur in axe recta ipsius lateri recto æqualis; circulus circa hanc tanquam diametrum descriptus cadet totus intra sectionem: si vero a vertice axis minoris in Ellipsi ponatur recta ipsius lateri recto æqualis, circulus hac diametro descriptus cadet totus extra sectionem.

FIG. 41, 42, 43, 44. SIt AB axis major Ellipseos, vel transversus Hyperbolæ, vel axis Parabolæ; & ponatur in axe recta AC ipsius lateri recto æqualis: circulus circa diametrum AC descriptus cadet totus intra sectionem; vel, si AB fuerit axis Ellipseos minor, cadet circulus totus extra sectionem.

Di-



ig. 38.
N. 2.

Ducatur enim AD axi ad rectos angulos ipsique AC æqualis, & jungatur CD, & in Ellipsi & Hyperbola jungatur etiam BLD, in Parabola vero ducatur DL axi parallela; & per quodvis in circulo punctum E ducatur EF ipsi AD parallela sectioni occurrens in G, ipsis autem AB, CD, LD occurrens in F, K, H punctis. Quoniam igitur æquales sunt AC, AD, æquales erunt FC, FK; &, propter circulum, est quadratum ex EF æquale rectangulo AFC, hoc est, ipsi AFK; propter sectionem vero est quadratum ex GF æquale rectangulo AFH (sciz. per 13. lib. 1. & Cor. 23. lib. 2. & Cor. 48. lib. 3.); est autem KF minor ipsâ FH, si AB non sit axis minor Ellipseos, in quo casu est KF major ipsâ FH; quare est rectangulum AFK minus ipso AFH in primo casu, ideoque quadratum ex EF minus erit quadrato ex GF, & recta EF minor ipsâ GF, & propterea est circulus totus intra sectionem: & similiter, in altero casu, ostendetur circulum totum extra eandem esse.

PROP. XXXIV.

Iisdem manentibus, si describatur circulus circa diametrum quæ major est axis latere recto minor autem axe, vel quæ minor est, in casu axis minoris in Ellipsi, latere recto, major autem axe; occurret circulus sectioni in duobus punctis; arcus vero ipsius inter ea puncta & verticem axis communem circulo & sectioni, totus erit extra sectionem in primo casu, in casu vero axis minoris in Ellipsi, totus erit intra eandem; reliquus autem circuli arcus in primo casu totus intra; in altero totus erit extra sectionem.

Sit axis AB, ipsiusque latus rectum æquale sit recta AC, & ducatur axi ad rectos angulos, ipsique AC æqualis AD; & sumatur AE quæ major sit AC, minor autem ipsâ AB, at, si AB sit axis minor in Ellipsi, sumatur AE minor ipsâ AC, major autem AB; &, circa diametrum AE descripto circulo, sumatur in AD recta AF æqualis ipsi AE; & jungatur EF, & in Ellipsi & Hyperbola ducatur BQD, in Parabola vero ducatur DQ ipsi AB parallela, occurratque EF in G, & per G ducatur ad axem perpendicularis GK, Fig. 45, 46, 47.

sectioni

sectioni occurrens in punctis H, *b*; erunt puncta H, *b* in circulo, arcus autem circuli HA*b* erit totus extra sectionem, in primo casu, & reliquus HE*b* totus intra eandem; in altero vero casu erit HA*b* totus intra, & HE*b* totus extra sectionem.

Nam quoniam punctum H est in sectione, erit quadratum ex HK æquale (rectangulo AKG, hoc est, propter æquales GK, KE) ipsi AKE; quare (per Lemma in pag. 24. huj.) est punctum H in circumferentia circa diametrum AE, &, eadem ratione, erit *b* in eadem.

Sumatur jam punctum L in sectione inter H & A, & ducatur ipsi AB ad rectos angulos LN, quæ circulo occurrat in M, ipsis autem QD, EF in O, P punctis; &, ut in præmissis, ostendetur quadratum ex LN æquale esse rectangulo ANO, quadratum vero ex MN æquale esse ipsi ANP; quando vero AB non est Ellipseos axis minor, est ANO rectangulum minus ipso ANP, quare & recta LN minor est ipsâ MN, & propterea arcus circuli *b*MA totus est extra sectionem; & similiter ostendetur reliquum arcum *b*E intra eandem esse: si vero AB fuerit Ellipseos axis minor contrarium eveniet, ut patet.

PROP. XXXV.

Si per verticem diametri quæ non est axis sectionis conicæ ducatur recta linea sectionem contingens, & describatur circulus contingens rectam lineam in vertice, & qui a diametro abscindit segmentum æquale lateri ipsius recto; occurret circulus sectioni rursus in unico tantum puncto; & inter punctum hoc & verticem diametri, ex una parte, totus intra sectionem; ex altera vero totus erit extra eandem.

Fig. 48, 49. Sit sectio conica cujus diameter AB, ipsamque contingat AC, sit autem segmentum diametri AD æquale lateri recto ipsius AB; & describatur circulus qui contingat AC in A, & transeat per punctum D; ponatur autem in contingente a puncto A recta AC æqualis ipsi AD, & ad diametrum circuli AE perpendicularis ducatur DF, quæ occurrat in puncto G junctæ BC, in Ellipsi aut Hyperbola;

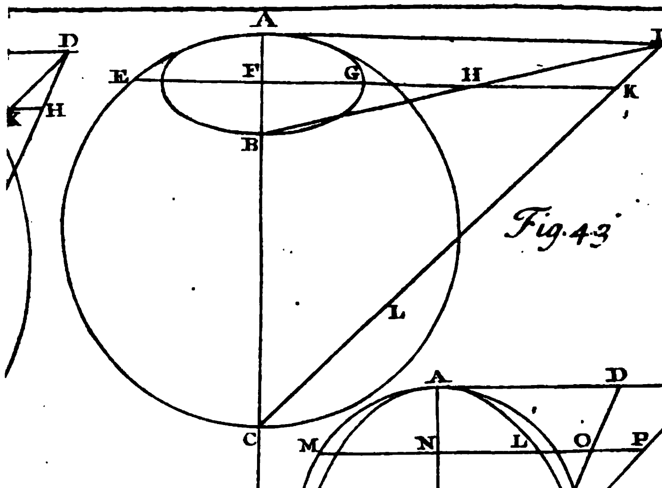


Fig. 43

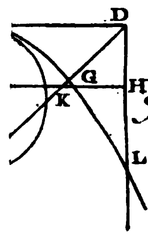


Fig. 42

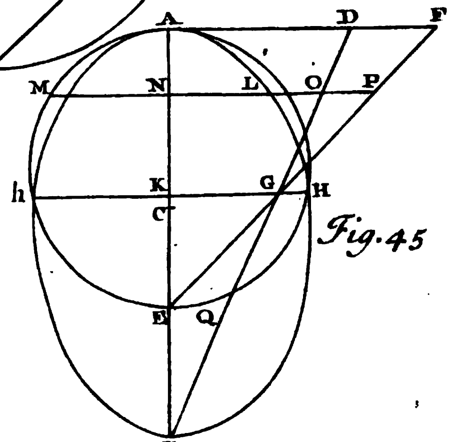
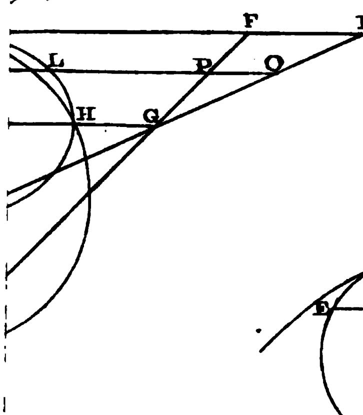


Fig. 45

…g. 46



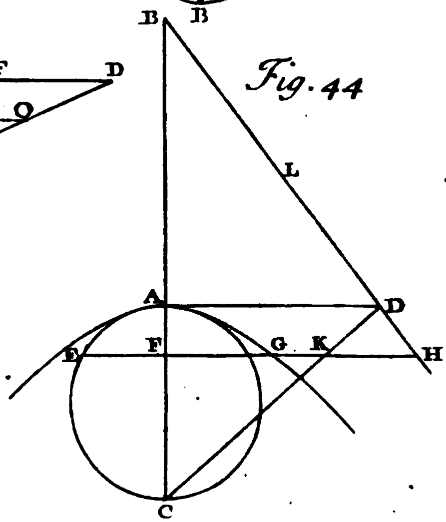


Fig. 44

…AB.XXX. pag. 178.

perbola; in Parabola vero rectæ quæ per C parallela ducitur ipsi AB, fiat autem ut DF bis ad DA, ita DG ad quartam DH, quæ versus easdem partes cum ipsa DG in recta DF ponatur, & jungatur HA, quæ circulo necessario occurret, occurrat ipsi in K: erit punctum K in sectione conica, cujus diameter est AB ipsiusque latus rectum AC quamque AC in A contingit: & quando punctum D est inter puncta A, B, erit arcus circuli DK & ille duorum arcuum KA cujus KD est pars totus intra sectionem, & reliquus KA totus extra eandem; quando vero punctum D est in AB producta, erit arcus DK & ille duorum arcuum KA cujus DK est pars totus extra sectionem, reliquus autem arcus KA totus intra eandem.

Ducatur enim a puncto K ad AE perpendicularis KL, quæ idcirco parallela erit contingenti AC; occurrat vero ipsis AB, CG in M, N punctis & junctæ DC in O. Est igitur, propter parallelas, NO ad OC, ut GD ad DC; ut vero OC ad MA, ita est DC ad DA; & ut MA ad MK, ita DA ad DH: quare ex æquo est NO ad MK, ut GD ad DH, hoc est, ex constructione, ut DF bis ad DA, hoc est, propter parallelas, ut ML bis ad MA; ergo est ML bis ad MA, ut NO ad MK, & propterea rectangulum KML bis æquale est rectangulo NO in MA: est autem, propter circulum, quadratum ex KA æquale rectangulo DAM, hoc est, propter DM, MO æquales, rectangulo OMA & quadrato ex MA simul; igitur, additis vel ablatis æqualibus, est rectangulum NMA simul cum quadrato ex MA æquale quadrato ex KA simul cum rectangulo KML bis, vel ipsorum excessui; hoc est per 13. aut 12. 2. quadratis ex KM, MA; auferatur commune quadratum ex MA, & reliquum, sciz. rectangulum NMA æquale erit reliquo quadrato ex KM: est autem (per 13. lib. 1. & Cor. 23. lib. 2. & Cor. 48. lib. 3.) quadratum ex ordinatim applicata diametro AB in puncto M æquale rectangulo NMA; ergo KM æqualis est isti ordinatim applicatæ, & propterea punctum K est in sectione.

Ostendendum restat arcum APK, cujus pars est KD, esse totum intra sectionem, quando D est inter A, B puncta, reliquum vero AQK totum esse extra eandem; quando vero D est in AB producta, esse arcum AQK cujus pars est KD totum extra, reliquum vero APK esse totum intra eandem.

Sit enim P punctum quodvis in arcu ADK in primo casu, vel in reliquo FIG. 48, 49.

reliquo arcu in secundo, & per P ducatur recta PQ circulo rursus occurrens in Q, rectis vero AE, AD, BC, DC, AH in R, S, T, V, X punctis. Erit igitur rectangulum TV in SA æquale rectangulo XSR bis, hoc enim eadem prorsus ratione ostenditur qua ostensum fuit rectangulum NO in MA æquale esse ipsi KML bis; æquales autem sunt VS, SD, quia & CA, AD ex constructione sunt æquales, quare quadratum ex SA simul cum rectangulo VSA æquale est quadrato ex SA simul cum ipso DSA, hoc est (per 3. 2.) rectangulo DAS, hoc est, propter circulum, quadrato ex AP, hoc est, per 12. 2. quadratis ex PS, SA & rectangulo PSR bis; ergo quadratum ex SA, & rectangulum VSA simul æqualia sunt quadratis ex PS, SA & rectangulo PSR bis, & ablato communi quadrato ex SA, erit rectangulum VSA æquale quadrato ex PS & rectangulo PSR bis: & ostensum fuit esse rectangulum TV in SA æquale rectangulo XSR bis; quare, additis hisce æqualibus, erit rectangulum TSA æquale quadrato ex PS & rectangulo PX in SR bis, in fig. 48. vel, in fig. 49. ablato, ex VSA, rectangulo TV in SA, additoque rectangulo XSR bis; erit rectangulum TSA & XSR bis æquale quadrato ex PS & rectangulo PSR bis. Manifestum igitur est in casu fig. 48. rectangulum TSA majus esse quadrato ex PS; in casu vero fig. 49. quoniam est SX minor PS, erit rectangulum XSR minus ipso PSR, quare, & in hoc casu rectangulum TSA majus est quadrato ex PS: est autem (per 13. lib. 1. & Cor. 23. lib. 2. & Cor. 48. lib. 3.) quadratum ex ordinatim applicata diametro AB in puncto S æquale rectangulo TSA, ergo in utroque casu est ordinatim applicata major ipsa PS; & propterea punctum circumferentiæ P cadit intra sectionem, hoc est, arcus circuli APK totus intra eandem cadit: & si punctum P cadat inter K & D, eadem sequentur per 13. 2. in fig. 48.

Sit jam Q punctum quodvis in arcu AQK opposito ei in quo est punctum P, & per Q ducatur recta QP circulo rursus occurrens in P. rectis vero AE, AD, BC, DC, AH in R, S, T, V, X punctis; erit igitur, ut in præmissis ostensum est, rectangulum TV in SA æquale rectangulo XSR bis; & quadratum ex SA simul cum rectangulo VSA æquale erit quadrato ex AP, seu AQ, additoque communi rectangulo QSR bis, erit quadratum ex SA simul cum rectangulo VSA & ipso QSR bis æquale quadrato ex AQ simul cum rectangulo QSR bis, hoc est (per 13. 2.) quadratis ex QS,

SA;

SA; auferatur commune quadratum ex SA, & rectangulum VSA, & ipsum QSR bis simul, æqualia erunt quadrato ex QS: est autem rectangulum TV in SA æquale ipsi XSR bis; quare, in fig. 48. additis hisce æqualibus, erit rectangulum TSA & rectangulum QSR bis simul æqualia quadrato ex QS & rectangulo XSR bis, & est QS major XS, ideoque QSR bis majus XSR bis, & propterea rectangulum TSA minus est quadrato ex QS: in fig. vero 49. auferatur ex rectangulo VSA ipsum TV in SA, & addatur rectangulum XSR bis, & erit rectangulum TSA, simul cum rectangulis QSR, XSR bis, æquale quadrato ex QS; minus igitur, & in hoc casu, est rectangulum TSA quadrato ex QS: est autem quadratum ex ordinatim applicata diametro AB in puncto S æquale rectangulo TSA; ergo, in utroque casu, est ordinatim hæc applicata minor ipsâ QS, & propterea punctum circumferentiæ Q cadit extra sectionem, hoc est, arcus circuli AQK totus extra eandem cadit. Et si punctum Q cadit inter K & D, eadem sequentur, per 12. 2. in fig. sciz. 49.

PROP. XXXVI.

Iisdem manentibus, si circulus abscindat a diametro segmentum majus latere ipsius recto, cadet circulus extra sectionem conicam ad utrasque partes verticis diametri in quo contingit rectam lineam: Si vero circulus abscindat segmentum minus latere recto, cadet intra sectionem ad utrasque partes ejusdem verticis.

Sit sectio conica, cujus diameter est AB, ipsamque contingat AC; Fig. 50, 51.
sit autem segmentum diametri AD majus AH, latere recto sciz. ipsius AB, & describatur circulus AKD, qui contingat rectam AC in A, & transeat per punctum D: si circulus sectioni nuspiam occurrat præterquam in A, manifestum est ipsum extra sectionem cadere ad utrasque partes puncti A; circulus enim abscindens segmentum AH, per præced. cadit extra sectionem ad unam partem puncti A, & extra hunc cadit circulus AKD. Si autem circulus AKD sectioni occurrat, ut in puncto K, fiat AC æqualis Fig. 50.
lateri recto AH, & AE ipsi AD, junctæque BC, DE sibi ipsis occurrant

currant in *b*, & ad AB ducatur *ba* parallela ipsi AC, & jungatur K*a*; si hæc contingat circulum AKD, erit totus circulus extra sectionem; si vero KA circulo rursus occurrat, ut in *k*, erit arcus KA*k* totus extra sectionem, reliquus vero intra: ducatur enim KL perpendicularis ad AG diametrum circuli, occurratque AD in M, ipsis vero BC, DE in N, O punctis, sumatur vero punctum quodvis P in arcu A*k*, inter rectas sciz. A*a*, *ak*, & ipsi AC parallela ducatur PQ occurrens ipsis AF, AD, BC, DE, K*k* in R, S, T, V, X punctis; &, quoniam est AC æqualis lateri recto diametri AB, & a puncto in sectione K ducta est KM ipsi AB ordinatim applicata, erit (per 13. lib. 1. & Cor. 23. lib. 2. & Cor. 48. lib. 3.) rectangulum NMA æquale quadrato ex KM, quare est NMA simul cum quadrato ex MA æquale quadratis ex KM, MA, hoc est, in fig. 50. (per 13. 2.) quadrato ex AK & rectangulo KML bis, hoc est, propter circulum, rectangulo DAM & ipsi KML bis, hoc est, propter æquales DM, MO, rectangulo OMA, quadrato ex MA & rectangulo KML bis; ergo est rectangulum NMA, simul cum quadrato ex KM, æquale rectangulo OMA, quadrato ex MA & rectangulo KML bis; &, ablatis quadrato ex MA & rectangulo OMA, erit rectangulum NO in MA æquale rectangulo KML bis; quare, ut NO ad KM, ita est (ML bis ad MA, & ita est) SR bis ad SA. Et, propter parallelas, est NO ad O*b*, ut TV ad V*b*: ut vero O*b* ad M*a*, ita est V*b* ad S*a*; & ut M*a* ad MK, ita S*a* ad SX: ergo, ex æquo, est NO ad MK, ut TV ad SX; & ostensum fuit esse NO ad MK, ut SR bis ad SA; quare est TV ad SX, ut SR bis ad SA; & propterea rectangulum TV in SA æquale est rectangulo XSR bis: quoniam vero æquales sunt VS, DS, erit rectangulum VSA simul cum quadrato ex SA æquale (rectangulo DAS, 3. 2. hoc est, propter circulum, quadrato ex AP, hoc est, per 12. 2.) quadratis ex PS, SA & rectangulo PSR bis; &, ablato communi quadrato ex SA, erit rectangulum VSA æquale quadrato ex PS & rectangulo PSR bis; & fuit TV in SA æquale rectangulo XSR bis, quare rectangulum VSA æquale est ipsi TSA & XSR bis; ergo quadratum ex PS & rectangulum PSR bis simul æqualia sunt rectangulo TSA & ipsi XSR bis: &, quoniam est PS minor XS, & ideo PSR bis minus ipso XSR bis, erit quadratum ex PS majus rectangulo TSA, hoc est, (per 13. lib. 1. & Cor. 23. lib. 2. & Cor. 48. lib. 3.) quadrato ex ordinatim applicata diametro AB in puncto S; ergo PS

major

major est hac ordinatâ, hoc est, circulus ad partes puncti P est extra sectionem: si autem sumatur punctum *k*, in quo recta K*a* circulo rursus occurrit, similiter ostendetur quadratum ex *ks* æquale esse rectangulo *ts*A, & proinde punctum *k* esse in sectione. Sumatur denique punctum quodvis Q in arcu AK, inter rectas scil. A*a* *a*K, & ipsi AC ducatur parallela QP occurrens ipsis AF, AD, BC, DE, K*k* in R, S, T, V, X punctis; &, ut in præmissis, ostendetur rectangulum VSA æquale esse rectangulo TSA & XSR bis: est autem VSA simul cum quadrato ex SA æquale rectangulo DAS, hoc est, propter circulum, quadrato ex AQ; quare rectangulum VSA, simul cum quadrato ex SA & rectangulo QSR bis, æquale est quadrato ex AQ simul cum rectangulo QSR bis, hoc est, (per 13. 2.) quadratis ex QS, SA; &, ablato communi quadrato ex SA, erit rectangulum VSA, simul cum ipso QSR bis, æquale quadrato ex QS: est igitur quadratum ex QS majus rectangulo VSA, hoc est, majus rectangulo TSA & ipso XSR bis; multo igitur majus est quadratum ex QS rectangulo TSA, hoc est, quadrato ex ordinatim applicata diametro AB in puncto S: ergo QS major est hac ordinatâ, & propterea punctum Q est extra sectionem; quare & arcus KA*k* totus extra sectionem est. Et similiter ostendetur arcum reliquum KD*k* totum intra eandem esse.

Pars 2. Abscindat jam circulus segmentum AD minus latere recto AH diametri AB, ut in fig. 51. & sumatur punctum quodvis P in arcu AK, inter rectas scil. A*a*, *a*K, iisdemque constructis, omnino ut in præcedente parte, ostendetur rectangulum VSA æquale esse quadrato ex PS & rectangulo PSR bis, rectangulum vero VSA simul cum ipso XSR bis æquale esse rectangulo TSA, ex quibus manifestum est ipsum TSA majus esse rectangulo VSA, multoque proinde majus esse quadrato ex PS; quare ordinatim applicata diametro AB in puncto S major est rectâ PS, ideoque punctum circuli P cadit intra sectionem. Si autem sumatur punctum quodvis Q in arcu A*k*, inter rectas scil. A*a*, *ak*, similiter ostendetur rectangulum VSA, simul cum rectangulo XSR bis, æquale esse rectangulo TSA; & rectangulum VSA, simul cum ipso QSR bis, æquale esse quadrato ex QS; & est rectangulum XSR bis majus ipso QSR bis, quia & recta XS major est ipsâ QS; quare rectangulum TSA majus est quadrato ex QS, & propterea ordinatim applicata diametro AB in puncto S major est ipsâ QS, hoc est, punctum FIG. 51.

ctum circuli Q cadit intra sectionem: ergo arcus circuli KA*k* totus intra eandem cadit. Et similiter ostendetur punctum *k* esse in sectione, reliquum vero arcum KD*k* totum extra ipsam esse. In prima autem parte hujus Prop. si recta K*a* sectionem contingat, similiter ostendetur circulum totum extra sectionem cadere; at in secunda, eundem totum intra cadere.

Cor. Et quoniam inter circulos, qui cadunt intra sectionem conicam ad utrasque partes verticis diametri A, majores propius accedunt, tum ad sectionem, tum ad circulum qui abscindit a diametro segmentum ipsius lateri recto æquale, quam minores: inter circulos vero, qui cadunt extra sectionem ad utrasque partes puncti A, minores propius accedunt, tum ad sectionem, tum ad prædictum circulum, quam majores, circulus hic, qui scil. ad unam partem puncti A cadit intra, ad alteram vero extra sectionem cadit, propius quovis alio circulo ad sectionem accedet, & propterea *eandem habere cum sectione conica curvaturam* in puncto A, seu ipsam in eo puncto *osculari* dicitur.

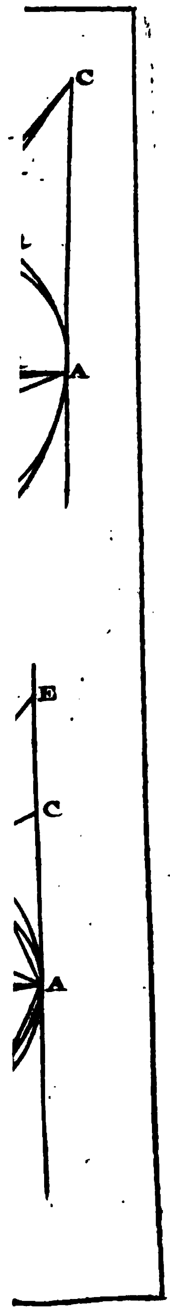
PROP. XXXVII.

Si a puncto in sectione conica ducatur ad axem alterutrum ordinatim ipsi applicata, & a puncto in quo sectioni rursus occurrit ducatur diameter, ad hanc autem ducatur a primo puncto ordinatim ipsi applicata; punctum in quo ordinata hæc sectioni rursus occurrit, erit in circumferentia circuli qui ejusdem est curvaturæ cum sectione conica in primo puncto.

Fig. 52. Sit sectio primo Ellipsis vel Hyperbola, cujus axis est AB, & centrum C; & a puncto in sectione D ducatur ad axem ordinatim applicata DE, sectioni rursus occurrens in F; per centrum vero ducatur FCG, cui a puncto D ordinatim applicata sit DH sectioni rursus occurrens in K: erit punctum K in circulo qui eandem habet curvaturam in puncto D cum sectione.

Ducatur enim recta DL sectionem contingens in D, occurratque axi in L, & in diametro DC sumatur DM, æqualis ipsius lateri

recto,


C
A
E
C
A

recto; & describatur circulus contingens rectam DL in D, & qui transeat per punctum M; circulus igitur hic, per praeced. ejusdem est curvaturae cum sectione in puncto D; sit ipsius diameter DNO, & ducatur, a centro, NP ad DM perpendicularis; ipsi vero DL ducatur CQ parallela, quae proinde erit semidiameter ipsi CD conjugata; & junctae FL sit semidiameter CR parallela, quae idcirco conjugata erit ipsi CF, occurratque CR contingenti DL in S, & ad ipsam ordinatim applicata sit DT; denique occurrat QC ipsi DK in V, & DO in X. Quoniam igitur aequales sunt semidiametri CD, CF, aequales erunt CQ, CR, quae ipsis conjugatae sunt; estque DP dimidium lateris recti ipsius CD, quare rectangulum CDP aequale est quadrato ex semidiametro CQ, hoc est, quadrato ex CR: &, quoniam contingit sectionem DS, & est DT ordinatim applicata diametro CR, erit quadratum ex CR aequale rectangulo SCT, hoc est, propter parallelas, rectangulo VDH; ergo rectangulum CDP aequale est ipsi VDH; & ipsorum dupla, rectangula sciz. MDC, KDV, aequalia erunt: juncta vero MO, erunt triangula OMD, CXD similia, quare rectangulum ODX aequale est rectangulo MDC, hoc est, ipsi KDV; est igitur OD ad KD, ut DV ad DX, ideoque aequiangula sunt triangula ODK, DVX: rectus autem est angulus VXD, quoniam XD est ad rectos angulos ipsi DL quae circulum contingit, quare rectus est angulus DKO, & propterea punctum K est in circumferentia OMD circa diametrum OD descripta. *Q. E. D.*

Sit jam sectio Parabola, cujus axis est AB, & a puncto in sectione D ducatur ad axem ordinatim ipsi applicata DE sectioni rursus occurrens in F, ducatur vero per F diameter FH, cui a puncto D ordinatim applicata sit DH, axi occurrens in C, & sectioni rursus in K: erit punctum K in circulo qui eandem habet curvaturam in puncto D cum Parabola. Fig. 53.

Ducatur enim DL sectionem contingens in D, occurratque axi in L, & diametro FH in Q; &, in diametro per D ducta, sumatur DM, aequalis ipsius lateri recto; & describatur circulus contingens rectam DL in D, & qui transeat per punctum M: circulus igitur hic, per praeced. ejusdem est curvaturae cum Parabola in puncto D: sit ipsius diameter DNO, & ducatur, a centro, NP ad DM perpendicularis; juncta vero FC occurrat ipsi DM in G, & DO in X; & jungatur FL, quae (per Cor. 3. 1. lib. 4) sectionem in F continget. Quoniam igitur est DH ordinatim applicata diametro

FH, parallela erit ipsi FL; & æquales sunt HF, FQ (per 14. lib. 1.) quare æquales sunt DL, LQ, ideoque DG, CH æquales erunt; quare parallelæ sunt DQ, GCF: æqualis propterea est DG ipsi QF, hoc est, ipsi FH; &, quoniam DF est perpendicularis ad axem, parallela erit directrici; ideoque segmenta diametrorum FH, DG inter ipsarum vertices & directricem æqualia sunt, & proinde diametrorum latera recta inter se æqualia erunt: est autem DM, ex constructione, æqualis lateri recto ipsius DG; ergo rectangulum MDG, hoc est, rectangulum FH in DM, æquale est (per 13. lib. 1.) quadrato ex DH: est vero KD dupla DH, & DH dupla ipsius DC, quare quadratum ex DH æquale est rectangulo KDC; ergo est KDC rectangulum æquale (ipsi MDG, hoc est, propter circulum) ipsi ODX; est igitur OD ad KD, ut DC ad DX, ideoque æquiangula sunt triangula ODK, DCX, & propterea punctum K est in circumferentia circa diametrum OD descripta, ut in præcedente casu ostensum fuit.

Cor. Recta DH angulum cum DF, ordinatâ scil. axi applicatâ,
Fig. 53. comprehendit æqualem ipsi FDL. Nam in Parabola, propter æquales DE, EF & angulos ad E rectos, erit angulus DCE æqualis ipsi FCE, hoc est, alterno DLC; quare æquales sunt CDE, LDE.
Fig. 52. In Ellipsi vero & Hyperbola, occurrat DH axi AB in Y; &, quoniam parallelæ sunt DY, CR, erit angulus DYE æqualis (ipsi RCE, hoc est, ipsi QCL, hoc est) angulo CLD, & recti sunt anguli ad E, ergo æquales sunt anguli YDE, EDL.

PROP. XXXVIII.

Si per punctum quodvis in Ellipsi aut Hyperbola describatur circulus, eandem habens curvaturam cum sectione in eo puncto, erit rectangulum contentum semiaxibus ad quadratum ex semidiametro conjugata ei quæ per punctum transit, ut semidiameter hæc ad semidiametrum circuli qui eandem in eo puncto cum sectione curvaturam habet.

SInt CA, CZ semiaxes, & per punctum in sectione D ducatur diameter DC, in qua sumatur recta DM æqualis ipsius lateri recto, & ducatur DL sectionem in D contingens, & ipsum DL contingat circulus per punctum M transiens, cujus diameter sit DNO, & qui (per Cor. 36. huj.) eandem cum sectione, in puncto D, curvaturam habebit: erit rectangulum ACZ ad quadratum ex CQ, semidiametro sciz. ipsi CD conjugata, ut ipsa CQ ad ND semidiametrum circuli. FIG. 52

Ducatur enim Ca perpendicularis ad contingentem DL; est igitur (per 35. 1.) rectangulum QCa æquale parallelogrammo contento semidiametris CD, CQ, hoc est, (per 20. lib. 2. & 45. lib. 3.) rectangulo ACZ. A centro circuli N ducatur ad DM perpendicularis NP, & similia erunt triangula CDa, DNP; quare est Ca ad CD, ut DP ad DN: ut vero CD ad CQ, ita, ex Definitione lateris recti, est CQ ad DP, dimidium sciz. ipsius DM; ergo, ex æquo perturbatè, est Ca ad CQ, ut CQ ad DN; ideoque (per 1. 6.) est rectangulum QCa ad quadratum ex CQ, ut CQ ad DN, & ostensum fuit rectangulum QCa æquale esse rectangulo ACZ; ergo est rectangulum ACZ ad quadratum ex CQ, ut CQ ad DN.

Est hæc Prop. 5. cap. 2. lib. 8. Miscellaneorum Analyticorum Cl. Moivræi.

PROP. XXXIX.

Si duæ rectæ parallelæ sectioni conicæ occurrant, sive neutra, sive una, sive utraque fuerit contingens, a duobus autem ipsarum terminis (non in eadem recta parallela) inflectantur ad sectionis punctum quodvis duæ rectæ; erit rectangulum contentum segmentis parallelarum inter inflexas & reliquos parallelarum terminos; ad quadratum ex recta quæ jungit alterutrum ex hisce terminis, & terminum in altera parallela a quo inflexa est recta, ut quadratum semidiametri quæ parallela est rectis parallelis, ad quadratum semidiametri quæ parallela est rectæ jungenti terminos; vel, si sectio fuerit Parabola, ut latus rectum diametri parallelarum, ad latus rectum diametri illius rectæ quæ jungit terminos.

FIG. 54, 55. *Cas.* 1. QUando neutra rectarum est contingens, sint AB, CD duæ rectæ parallelæ in sectione conica & a terminis ipsarum A, C inflectantur AE, CE ad punctum in sectione, occurrantque parallelis in F, G; & jungantur BC, AD; erit rectangulum contentum abscissis DF, BG ad quadratum ex BC (vel ex AD) ut quadratum ex semidiametro ipsis AB, CD parallelâ, ad quadratum ex semidiametro quæ parallela est rectæ BC (vel AD); vel, si sectio fuerit Parabola, ut latus rectum diametri rectarum AB, CD ad latus rectum diametri BC.

A puncto E ducatur EK parallela ipsis AB, CD, occurratque AD & BC in H, K punctis, & quoniam parallelæ sunt tres rectæ BA, KE, CF, erit AH ad AD, ut BK ad BC, quare est EH ad DF, ut BK ad BC, &, permutando, est EH ad BK, ut DF ad BC, est autem propter parallelas EK ad KC ut GB ad BC; ergo rationes ex hisce æqualibus compositæ inter se æquales erunt, & propterea (per 23. 6.) erit rectangulum HEK, ad rectangulum BKC, ut rectangulum DF in GB ad quadratum ex BC. Quoniam vero est ABCD trapezium in sectione inscriptum cujus duo opposita latera AB, CD sunt inter se parallelæ, erit (per Cor. 2. 27. lib. 4.) rectangulum HEK ad ipsum BKC, ut quadratum ex semidiametro ipsi HE parallela, ad quadratum ex semidiametro quæ rectæ BC est parallela, vel, si sectio fuerit Parabola, erunt rectangula ista ut latera diametrorum ipsarum HE, BC; ergo & rectangulum DF in GB est ad quadratum ex BC, in eadem ratione.

FIG. 56. *Cas.* 2. Et si una rectarum, viz. AG contingit sectionem, eodem prorsus modo ostendetur esse rectangulum HEK ad ipsum BKC, ut DF in AG ad quadratum ex AC; & quoniam recta DC parallela est contingenti AG, bifariam secabitur CD diametro quæ per contactum A transit; quare (per Cor. 1. 27. lib. 4.) eadem ostendentur in hoc casu quæ in præcedente ostensa fuerunt.

FIG. 57. *Cas.* 3. Et si utraque recta AG, CF contingat sectionem, ostendetur ut in præmissis esse quadratum ex EK ad rectangulum AKC, ut rectangulum DF in AG ad quadratum ex AC; & est quadratum ex EK ad rectangulum AKC, ut quadratum ex diametro parallela ipsi EK ad quadratum ex AC.

Cor. Hinc sequitur rectangulum DF in AG æquale esse quadrato

to ex diametro quæ ipsi EK parallela est, hoc est, quæ conjugata est diametro AC.

Corollarium hoc est Propositio 53. lib. 3. Con. Apollonii qui in tribus Propositionibus sequentibus sciz. 54, 55, 56. considerat casum in quo contingentes non sunt inter se parallelæ; multo autem generalius rem hanc tractasset, si casum in quo parallelæ non sint contingentes animadvertisset.

PROP. XL.

Iisdem manentibus, si ab iisdem A, C vel a reliquis B, D parallelarum terminis inflectantur ad aliud sectionis punctum L rectæ BL, DL abscindentes inter ipsas & reliquos parallelarum terminos segmenta CM, AN; erit rectangulum contentum ipsis CM, AN æquale rectangulo contento primo abscissis DF, GB. Fig. 54, 55, 56, 57.

UTrumque enim horum est ad quadratum ex BC, ut quadratum ex semidiametro quæ parallela est parallelis, ad quadratum ex semidiametro quæ ipsi BC est parallela, vel, si sectio fuerit Parabola, ut latus rectum diametri parallelarum ad latus rectum diametri ipsius BC.

PROP. XLI.

Iisdem manentibus, si ab iisdem A, C punctis inflectantur ad alterum ipsorum, sciz. ad punctum A duæ rectæ, hoc est, si ducatur contingens AF, & jungatur CA; erit rectangulum contentum abscissis FD, AB æquale rectangulo contento abscissis CM, AN ab aliis inflexis BL, DL, vel ab iisdem punctis A, C, vel a reliquis B, D. Fig. 58.

DUcatur enim BQ parallela ipsi AF, sectioni rursus occurrens in Q, & AB in R, & jungatur BQ occurrens ipsi CD in S; & quoniam a puncto A in sectione ad ipsam ducta est AB, & AF eandem

eandem in A contingens, & ab alio puncto D ductæ ad ſectionem ſunt rectæ DC, DQ primo ductis parallelæ; erit (per 29. lib. 4.) AC ipſi BQ parallela; quare eſt ABSC parallelogrammum, & propterea rectangulum FD in AB æquale eſt ipſi AR in SC contento ſcil. rectis quæ abſcinduntur inflexis BQ, DQ, hoc eſt (per præced.) rectangulo CM in AN contento rectis quæ inflexis BL, DL abſcinduntur.

Idem vero ſequitur in caſu quo CD contingit ſectionem.

PROP. XLII.

Si duæ rectæ parallelæ Hyperbolæ vel Hyperbolis oppoſitis occurrant, a duobus autem ipſarum terminis qui non ſunt in eadem parallela ducantur duæ rectæ aſymptoto parallelæ: erit rectangulum contentum ſegmentis parallelarum inter ductas aſymptoto parallelas & reliquos parallelarum terminos, ad quadratum ex recta quæ jungit alterutrum ex hiſce reliquis terminis & terminum in altera parallela a quo ducta eſt recta aſymptoto parallela; ut quadratum ex ſemidiametro quæ parallela eſt parallelis, ad quadratum ex ſemidiametro quæ parallela eſt rectæ jungenti terminos.

Fig. 59, 60. Sint AB, CD rectæ parallelæ in ſectione inſcriptæ, & ab ipſarum terminis A, C ducantur AF, CG parallelæ aſymptoto ON, occurrantque ipſis AB, CD in G, F punctis, & jungatur CB: erit rectangulum contentum abſciſſis GB, FD ad quadratum ex CB; ut quadratum ex ſemidiametro ipſis AB, CD parallelâ, ad quadratum ex diametro ipſi CB parallelâ.

Occurrant enim AB, CD, CB aſymptoto in punctis K, L, M; &, propter æqualia rectangula AKB, CLD, erit KA, ſeu LF ad LC, ſeu KG, ut LD ad KB; & per 19. aut 12. 5. KA ad LC, ut FD ad GB; eſt vero, propter parallelas, LC ad MC, ut GB ad CB; quare, ex æquo, eſt KA ad MC, ut FD ad CB; &, propter parallelas, eſt KB ad MB, ut GB ad CB; æquales igitur ſunt rationes ex hiſce æqualibus compoſitæ, ideoque (per 23. 3.) eſt rectangulum AKB ad ipſum CMB, ut rectangulum DF in GB ad

qua-

quadratum ex CB. Rectangula autem AKB, CMB æqualia sunt quadratis ex semidiametris ipsis AB, CB parallelis, ergo constat Propositio.

PROP. XLIII.

Si in Parabola inscribantur duæ parallelæ AB, CD & a duobus ipsarum terminis, non in eadem parallela, ducantur duæ diametri AF, CG parallelis in F, G occurrentes; erit rectangulum BG in DF contentum segmentis parallelarum inter diametros & reliquos parallelarum terminos, ad quadratum ex recta BC quæ jungit alterutrum ex hisce terminis & terminum in altera parallela a quo ducta est diameter; ut latus rectum diametri rectarum parallelarum ad latus rectum diametri rectæ BC. Fig. 61.

Occurrat autem BC diametro AF in H, & ducatur per B ad DC diameter BK, sitque recta P latus rectum diametri ipsarum AB, CD, & recta Q latus rectum diametri ipsius BC. Et quoniam parallelæ sunt AB, CD, & diametri sunt AF, BK, erunt FC, KD æquales; est igitur DF æqualis KC, hoc est, ipsi BG, ideoque rectangulum BG in DF æquale est quadrato ex BG; est vero BC ad BH, ut GC ad AH, quare (1. 6.) est BCH rectangulum ad ipsum BHC, ut rectangulum Q in GC ad Q in AH; æquale autem est rectangulum BHC ipsi Q in AH (20. lib. 4.) quare & rectangulum BCH æquale est rectangulo Q in GC; ergo est rectangulum P in GC ad ipsum BCH, ut idem P in GC ad Q in GC; & est P in GC æquale (per 20. lib. 4.) rectangulo BGA, est itaque BGA ad ipsum BCH, ut P in GC ad Q in GC, hoc est, ut P ad Q; sed, propter parallelas, est BGA ad BCH, ut quadratum ex BG ad quadratum ex BC; ergo ut quadratum ex BG, hoc est, rectangulum BG in DF, ad quadratum ex BC, ita est P ad Q. *Q. E. D.*

N. B. Hæc de Parabola & prior de Hyperbola obtinent etiam quando una rectarum parallelarum in Parabola, vel una vel utraque in Hyperbolis sunt contingentes.

PROP.

PROP. XLIV.

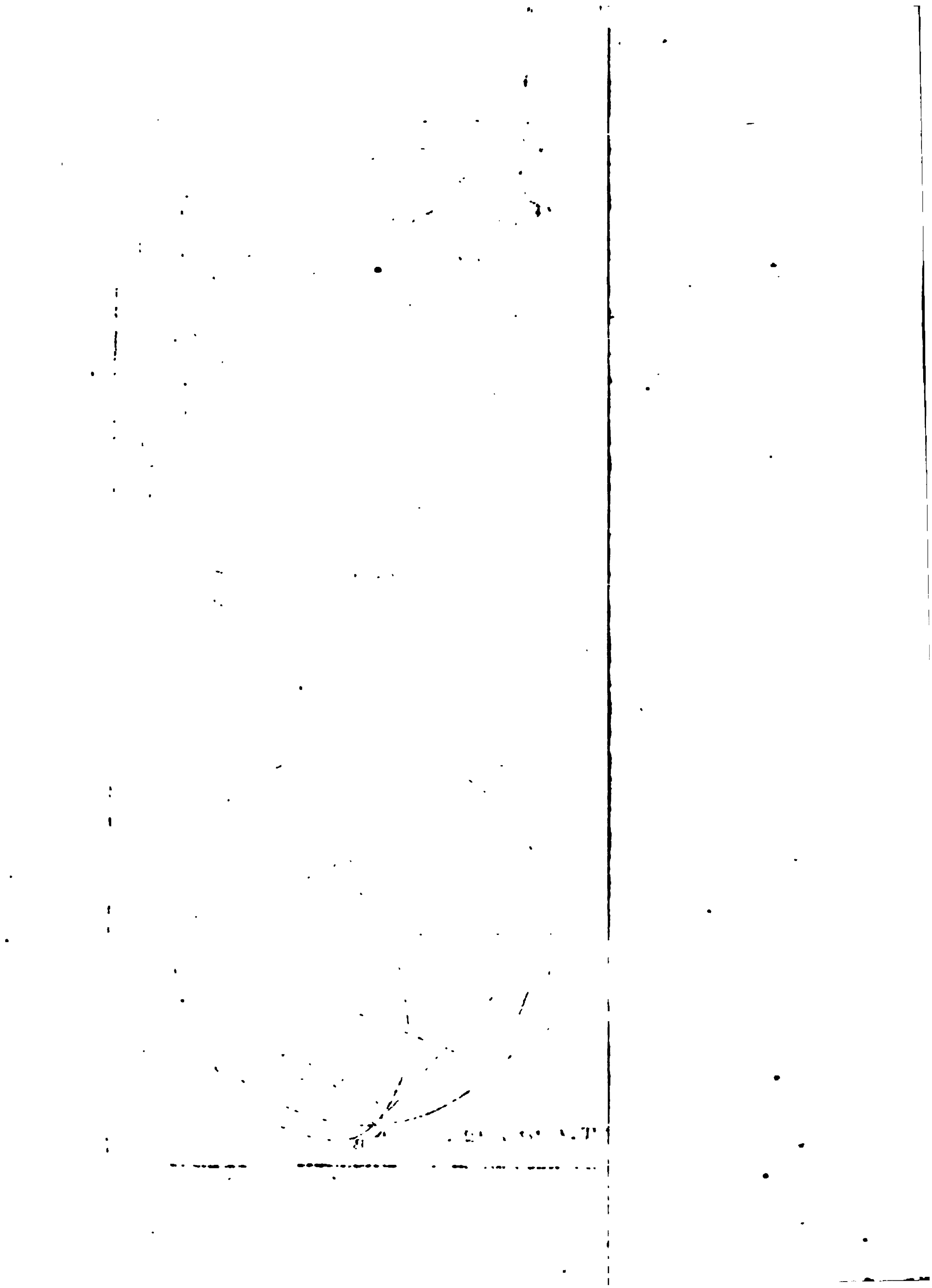
Si in sectione conica inscribantur duæ rectæ parallelæ, & a duobus ipsarum terminis, non in eadem recta parallela, inflectantur ad quodvis sectionis punctum duæ rectæ; a reliquis vero parallelarum terminis inflectantur ad aliud quodvis sectionis punctum aliæ duæ rectæ, prioribus occurrentes: recta linea quæ transit per duas intersectiones inflexarum, quas intersectiones fiunt a rectis quæ non a terminis ejusdem inscriptæ ducuntur, parallela erit rectis parallelis. Idem autem eveniet, si una vel utraque inscripta contingat sectionem.

FIG. 54, 55, 56, 57. Sint AB, CD duæ rectæ parallelæ in sectione conica inscriptæ, & a terminis ipsarum A, C inflectantur AE, CE ad punctum in sectione; a reliquis vero B, D inflectantur ad aliud punctum, in eadem, rectæ BL, DL, sitque O intersectio ipsarum AE, DL; & punctum P reliquarum CE, BL: erit juncta OP parallela ipsis AB, CD.

Occurrant enim AE, CE ipsis CD, AB in F, G, iisdem vero occurrant BL, DL in punctis M, N; & quoniam (per 40. huj.) est rectangulum DF in GB æquale rectangulo CM in AN, erit GB ad CM, ut AN ad DF; quare, propter parallelas, est BP ad PM, ut NO ad OD, erit igitur BM ad PM, ut ND ad OD, ut vero LM ad BM, ita LD ad ND; ergo, ex æquo, est LM ad PM, ut LD ad OD, ideoque parallelæ sunt DM, OP. Idem etiam (per 41. huj.) eveniet, si una ex inflexis AEF contingat sectionem & jungatur CA.

PROP. XLV.

Si in sectione conica inscribantur duæ rectæ lineæ non inter se parallelæ, & a duobus ipsarum terminis quæ non sunt in eadem recta inscripta inflectantur ad punctum quodvis in sectione duæ rectæ, & a reliquis terminis ad aliud quodvis in sectione punctum inflectantur aliæ duæ rectæ; recta linea quæ transit per duas intersecti-



ones harum inflexarum cum prioribus inflexis, quæ intersectiones fiunt a rectis quæ non ab ejusdem inscriptæ terminis ducuntur, verget ad intersectionem duarum inscriptarum. Si autem duæ inflexæ, quæ non ab ejusdem parallelæ terminis ducuntur, sint inter se parallelæ; recta quæ transit per intersectionem reliquarum inflexarum, & occursum inscriptarum parallela erit inflexis parallelis.

Cas. 1. Sint AB, CD rectæ inscriptæ, & a terminis ipsarum A, C inflectantur ad sectionem rectæ AE, CE, a reliquis vero terminis B, D inflectantur BF, DF, sitque punctum G intersectio duarum AE, DF, quæ sciz. a terminis A, D, non in eadem inscripta, ducuntur; & sit H intersectio reliquarum BF, CE; ostendendum est rectam esse lineam quæ per G, H & punctum K, occursum sciz. inscriptarum, transit. Fig. 62.

Jungatur enim BC, & per punctum A, terminum sciz. unius inscriptæ, ducatur AL parallela alteri CD, & sectioni rursus occurrens in L, juncta vero LF occurrat BC in M, & CE in N, sit vero punctum O intersectio rectarum AB, FD, & junctæ OM, GN occurrant BF in P, Q punctis; denique eidem BF occurrat CD in R.

Quoniam igitur parallelæ sunt AL, CD, & a terminis ipsarum A, C inflectantur AE, CE ad sectionem, & a reliquis terminis L, D ad eandem inflectantur LF, DF, sintque puncta G, N ipsarum intersectiones, quæ sciz. fiunt a rectis quæ non inflectuntur ab ejusdem parallelæ terminis, erit, per Prop. præced. recta GN parallela ipsis AL, CD: & similiter, quoniam a terminis A, C inflexæ sunt AB, CB, inflexis DF, LF occurrentes in O, M; erit recta OM parallela iisdem AL, CD, & igitur ipsi GN: ergo, propter parallelas est KR ad RC, ut (OP ad PM, hoc est, ut) GQ ad QN, &, permutando, KR ad GQ, ut (RC ad QN, hoc est, ut) RH ad QH; ergo (per Lemma 1. lib. 2.) recta est linea quæ per puncta H, G, K transit.

Cas. 2. Sint jam AE, DF duæ sciz. ex inflexis, quæ non ab ejusdem inscriptæ terminis ducuntur, inter se parallelæ; & sit H intersectio reliquarum BF, CE, K vero intersectio inscriptarum AB, CD; erit juncta KH parallela ipsis AE, DF. Fig. 63.

Iisdem enim constructis, occurrat LF ipsi BC in M, sit vero punctum O intersectio ipsarum AB, FD, & juncta OM occurrat BF in P, eidemque BF occurrat CD in R. Quoniam igitur parallelæ sunt AL, DC in sectione conica, ut & AE, DF, erunt (per 29. lib. 4.) LF, EC inter se parallelæ, & quoniam ab ipsarum AL, DC terminis A, C inflectantur ad sectionem AB, CB; & a reliquis L, D inflexæ sunt LF, DF, prioribus occurrentes in punctis O, M, erit OM parallela ipsi CRK (per 44. huj.) quare, propter parallelas, est KR ad RC, ut OP ad PM; ut vero RC ad RH, ita (propter æquiangula triangula CRH, MPF) est PM ad PF; ergo ex æquo est KR ad RH, ut OP ad PF, & sunt circa æquales angulos, quare æquiangula sunt triangula KRH, OPF, æquales igitur sunt anguli KHR, OFP & rectæ FDO, KH inter se parallelæ.

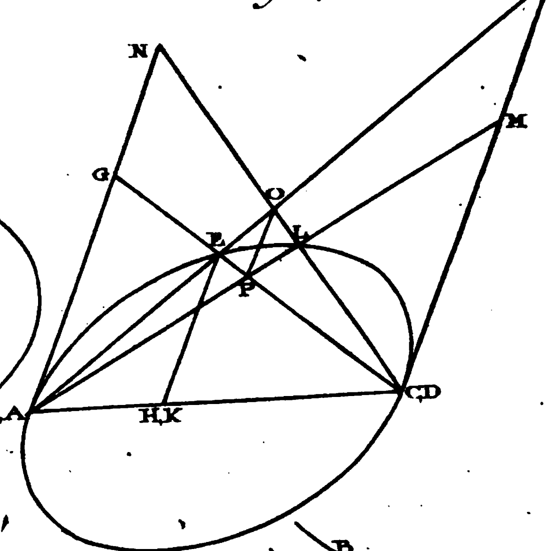
PROP. XLVI.

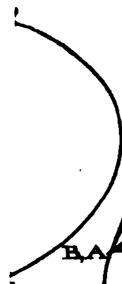
Si in sectione conica sumatur punctum quodvis, & in eadem inscribatur recta, a puncto vero & uno termino rectæ inflectantur duæ rectæ ad sectionem, & ab eodem puncto & reliquo termino rectæ inflectantur ad sectionem aliæ duæ rectæ; recta quæ transit per occursus rectarum quæ a puncto ducuntur, cum iis quæ a terminis rectæ inscriptæ ducuntur, verget ad occursum rectæ quæ sectionem in puncto contingit cum recta inscripta. Si autem duæ ex inflexis, quæ non ab utroque inscriptæ termino ducuntur, inter se parallelæ fuerint; recta quæ transit per intersectionem reliquarum inflexarum & occursum inscriptæ cum recta contingente parallela erit inflexis parallelis.

FIG. 64. *Cas.* 1. Sit A punctum in sectione & CD recta inscripta, & inflectantur AE, CE ad sectionem, ut & AF, DF; & occurrant AE, AF ipsis DF, CE in G, H punctis, & sectionem contingat AK in A, occurratque CD in K: recta erit linea quæ per G, H, K puncta transit.

Jungatur AC, & a puncto A ducatur AL parallela ipsi CD, occurratque sectioni in L, juncta vero LF occurrat AC in M, & CE in

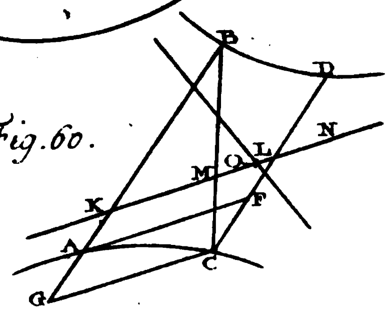
Fig. 57.





g. 58.

Fig. 60.



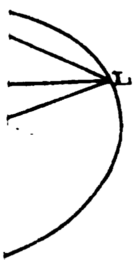
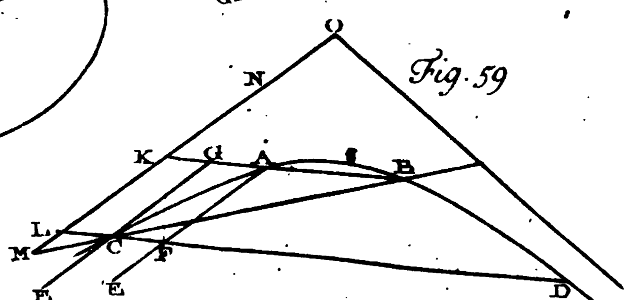


Fig. 59



TAB. XXXIII. pag. 194.

in N; sit vero O intersectio ipsarum AK, FD, & junctæ OM, GN occurrant rectæ AF in P, Q punctis, eidemque AF occurrat CD in R. Erit igitur, ut in Cas. 1. præcedentis ostensum fuit, recta GN parallela ipsis AL, CD; & quoniam contingens AK, & juncta AC occurrunt inflexis DF, LF in punctis O, M, erit (per 44. huj.) recta OM parallela iisdem AL, CD; quare, ut in Cas. 1. præced. ostensum est, recta est linea quæ per G, H, K transit.

Cas. 2. Sint jam AE, DF, duæ sciz. ex inflexis quæ non ab inscriptæ utroque termino ducuntur, inter se parallelæ, & sit H intersectio reliquarum AF, CE; K vero intersectio rectæ contingentis & inscriptæ: erit juncta KH parallela ipsis AE, DF. FIG. 65.

Iisdem enim constructis, occurrat LF ipsi AC in M, sit vero punctum O intersectio ipsarum AK, FD, & juncta OM occurrat AF in P, eidemque AF occurrat CD in R. Erunt igitur, ut in casu 2. præced. ostensum fuit, LF, EC inter se parallelæ; & quoniam ex constructione parallelæ sunt AL, CD, & contingens AK & juncta AC occurrunt inflexis DF, LF in punctis, O, M, erit (per 44. huj.) recta OM parallela iisdem AL, CD; quare, ut in Cas. 2. præced. ostensum fuit, erunt rectæ FDO, KH inter se parallelæ.

PROP. XLVII.

Si a duobus in sectione conica punctis inflectantur ad duo alia in eadem puncta bis duæ rectæ, recta quæ transit per harum intersectiones verget ad intersectionem rectarum quæ sectionem, in punctis a quibus inflexæ sunt rectæ, contingunt. Si autem duæ ex inflexis inter se parallelæ fuerint, recta quæ transit per intersectionem reliquarum, & occursum rectarum quæ sectionem contingunt in punctis a quibus inflexæ ductæ sunt, parallela erit inflexis parallelis.

Cas. 1. Sint A, C puncta in sectione, & ab ipsis inflectantur AE, CE ad sectionem, ut & AF, CF prioribus in G, H occurrentes, & rectæ AK, CK sectionem in A, C contingant; recta erit linea quæ per G, H, K puncta transit. FIG. 66.

Jungatur enim AC, & ducatur AL parallela contingenti CK, occurratque sectioni rursus in L, juncta vero LF occurrat AC in M, & CE in N, sitque O intersectio rectæ CF & contingentis AK, & junctæ OM, GN occurrant AF in P, Q punctis, & eidem AF occurrat contingens CK in R.

Quoniam igitur parallelæ sunt AL, CK, quarum CK contingit sectionem in C, & a punctis A, C inflexæ sunt AE, CE ad sectionem, & a punctis L, C inflexæ sunt ad eandem LF, CF, quarum intersectiones sunt G, N, quarum sciz. nulla sit a rectis AF, LF quæ a terminis inscriptæ AL ducuntur, erit (per 44. hujus) GN parallela ipsis AL, CK; & quoniam ab iisdem punctis A, C inflexæ sunt AK, CA ad punctum A, *i. e.* quoniam est AK contingens, & juncta est AC inflexis LF, CF occurrentes in O, M, erit recta OM parallela iisdem AL, CK, & igitur ipsi GN, quare, prorsus ut in casu 1. Prop. 45. huj. ostendetur rectam esse lineam quæ per G, H, K transit.

FIG. 67. *Cas.* 2. Sint jam AE, CF, duæ sciz. ex inflexis, inter se parallelæ, & sit H intersectio reliquarum AF, CE; K vero intersectio contingentium: erit juncta KH parallela ipsis AE, CF.

Iisdem enim constructis, occurrat LF ipsi AC in M, sit vero punctum O intersectio ipsarum AK, FC, & juncta OM occurrat AF in P, eidemque AF occurrat CK in R. Erunt igitur, ut in casu 2. 45. huj. ostensum fuit, LF, EC inter se parallelæ; & quoniam ex constructione parallelæ sunt AL, CK, & contingens AK junctaque AC occurrunt inflexis CF, LF in punctis O, M, erit (per 44. hujus) recta OM parallela iisdem AL, CK; quare, ut in Cas. 2. 45. hujus ostensum fuit, erunt rectæ FCO, KH inter se parallelæ.

FIG. 66. COR. 1. Hinc aliter demonstrari potest Prop. 7. hujus libri, sciz. Si duæ rectæ AC, EF in sectione conica inscriptæ sint, & jungantur termini ipsarum quatuor rectis AF, AE, CF, CE, sibi mutuo occurrentes in G, H punctis; quæ vero sectionem in terminis rectæ AC contingunt occurrant in K, & quæ ipsam in terminis rectæ EF contingunt sibi mutuo occurrant in S: erunt quatuor puncta G, H, K, S in recta linea.

Nam quoniam a punctis A, C in sectione inflectuntur AE, CE, ut & AF, CF ad sectionem, recta GH, quæ per intersectiones ipsarum

rum transit, verget ad K, intersectionem sciz. contingentium sectionem in punctis A, C. Similiter, quoniam a punctis E, F inflectuntur ad sectionem rectæ EA, FA & EC, FC, quæ eædem sunt cum prioribus inflexis, verget GH ad S, concursum sciz. rectarum quæ sectionem contingunt in E, F; ergo quatuor puncta G, H, K, S sunt in eadem recta.

Cor. 2. Hinc, datis positione quinque rectis, sectionem conicam contingentibus, facillime inveniri poterunt puncta contactûs in ipsis, sciz. sectione positione non datâ.

Contingant sectionem conicam rectæ AB, BC, CD, DE, EA, & invenienda sunt puncta contactûs in ipsis. Fig. 68.

Sit ABCDE quinquelaterum contingentibus comprehensum, & appelletur AB *latus primum*, BC *latus secundum*, & ita deinceps; sitque FBCD quadrilaterum contentum primis quatuor lateribus, & ducantur rectæ diagonales BD, FC, sibi mutuo occurrentes in M: omisso jam quinquelateri primo latere AB, sit ICDE quadrilaterum reliquis contentum, & ducantur diagonales ipsius ID, CE, sibi mutuo occurrentes in N; & MN jungatur: transibit hæc per puncta in quibus latus secundum BC, & quartum DE, sectionem contingunt.

Sint enim G, H, K, L, O puncta contactûs in ipsis AB, BC, CD, DE, EA, & jungantur GH, LK & GL, HK: quoniam igitur in sectione inscriptæ sunt GH, LK, estque B punctum concursûs rectarum quæ sectionem in terminis ipsius GH contingunt, D vero concursûs earum quæ eandem in terminis ipsius LK contingunt, erunt puncta B, D & intersectio junctarum GK, LH in recta linea, per Cor. 1. hujus Propositionis. Rursus, quoniam in sectione inscriptæ sunt GL, HK, rectæ vero quæ sectionem contingunt in G, L conveniunt inter se in F, quæ vero ipsam in H, K contingunt conveniunt in C; erunt puncta F, C & intersectio ipsarum GK, LH in recta linea: eadem autem intersectio ostensa fuit esse in recta BD; ergo ipsa erit in rectarum BD, FC occursu, hoc est, in puncto M; quod propterea erit in recta LH. Jungatur jam LO; &, quoniam in sectione inscriptæ sunt rectæ OH, LK, rectæ vero quæ sectionem in O, H contingunt conveniunt in I, & quæ ipsam in L, K contingunt conveniunt in D, erunt puncta I, D, & junctarum OK, LH intersectio, in recta linea; &, quoniam OL, HK inscriptæ sunt in sectione, eadem ratione ostendentur puncta E, C, &

& earundem OK, LH interſectio, in recta linea exiſtere: quare erit ipſa in rectarum ID, EC occurſu, hoc eſt, in puncto N: eſt igitur N in recta LH, & oſtenſum fuit eſſe M in eadem; quare recta MN tranſit per L, H, puncta ſciz. contactûs in ipſis BC, DE. Et eadem prorſus ratione invenientur contactûs puncta in reliquis rectis. *Q. E. D.*

Fig. 69. Cor. 3. Et ſimiliter, ſi in ſectione conica data ſint quinque puncta A, B, C, D, E, facillime invenientur rectæ quæ ſectionem in punctis iſtis contingunt, ſectione ſciz. poſitione non datâ.

Vocetur A *primum punctum*, B *ſecundum*, & ita deinceps; & jungantur quatuor prima puncta A, B, C, D, rectis AB, BC, CD, DA ſibi mutuo occurrentibus in punctis F, G; jungantur etiam AC, BD: &, quoniam in ſectione inſcriptæ ſunt rectæ AC, BD, erunt (per Cor. 1. huj. Prop.) puncta F, G, & occurſus rectarum quæ ſectionem in punctis B, D contingunt, in recta linea, hoc eſt, juncta FG per occurſum hunc tranſibit. Omiſſo jam puncto A, ſit BCDE quadrilaterum reliquis quatuor contentum, ſintque puncta H, K interſectiones laterum ipſius, & EC jungatur: quoniam igitur in ſectione inſcriptæ ſunt EC, BD rectæ, erunt interſectiones H, K, & occurſus rectarum quæ ſectionem in B, D contingunt, in recta linea, hoc eſt, juncta HK per occurſum hunc tranſibit: idem vero occurſus oſtenſus fuit eſſe in recta FG, ergo ipſe in rectarum FG, HK interſectione L invenietur; & propterea junctæ LB, LD ſectionem in B, D punctis contingent. Et eadem prorſus ratione invenientur contingentes ſectionem in reliquis punctis: utrumque vero Problema ope ſolius primi Poſtulati Euclidis ſolutum eſt.

SCHOLIUM.

EX Propoſitionibus 44, 45 & ſeqq. multa oriuntur Theoremata & loca ſolida, ad difficiliorum Problematum ſolidorum compoſitiones utilia & neceſſaria, quæ, Deo volente, ſi hæc Geometris arrideant, (ut & alia de hiſce Sectionibus, quæ ad Elementarem hujuſmodi inſtitutionem minus proprie ſpectant,) poſtea forſitan trademus. Interea ex Propoſitionibus hiſce manifeſta ſunt ſequentia.

1. *Si in ſectione conica data ſint quatuor puncta, & a duobus ipſorum quibuſvis inflectantur ad ſectionem duæ rectæ, a reliquis vero duobus inflectantur ad eandem aliæ duæ rectæ; quæ per quatuor inflexarum interſectiones*


F
H

terſectiones tranſeunt rectæ, vel parallelæ erunt rectis poſitione datis, vel ad data puncta vergent.

2. Et ſi in ſectione conica data ſint tria puncta, & a duobus ipſorum quibuſvis inflectantur ad ſectionem duæ rectæ, a reliquo vero puncto & altero ex prioribus inflectantur ad eandem aliæ duæ; recta quæ per inflexarum interſectiones tranſit, vel parallela erit rectis poſitione datis, vel verget ad punctum datum.

3. Eadem etiam evenient, ſi a duobus in ſectione conica punctis datis inflectantur ad ſectionem bis duæ rectæ.

Tenent etiam hæ Propoſitiones in rectis lineis, adeo ut rectarum linearum & ſectionum conicarum, inter quas circulus annumerandus eſt, affectio hæc maxime generalis merito videatur.

PROP. XLVIII.

Portioni Parabolæ vel portionis dimidio circumſcribi poteſt figura, aliaque in ipſa inſcribi ex parallelogrammis æqualem latitudinem habentibus, quarum quæ circumſcribitur portionem excedat, quæ vero inſcribitur ab eadem deficiat ſpatio quod minus ſit ſpatio quovis dato.

SIt BAC dimidium portionis Parabolæ, cujus diameter AB, & vertex A, datumque ſpatium ſit D; & ad BC applicetur parallelogrammum BEFC in angulo ABC, æquale ipſi D; & ipſius BE ſumatur multiplex BG, quæ major ſit ipsâ BA, & dividatur BA in tot partes æquales BH, HK, KA, quot ſunt in BG æquales ipſi BE: &, quoniam (per 15. 5.) eſt BH ad BE, ut BA ad BG, erit BH minor ipsâ BE; quare, completo parallelogrammo BHLC, erit BL minus ipſo BF: ductis autem per H, K, A parallelis ipſi BC, ducantur, per puncta in quibus Parabolæ occurrunt, rectæ ipſi AB parallelæ, atque ita habebitur figura Parabolæ circumſcripta, viz. AONPMLCB, eidemque inſcripta KNQMSB, quarum exceſſus conſtat ex ipſis AN, NM, MC, quæ, propter latitudines AK, KH, HB inter ſe æquales, erunt ipſis BQ, QS, SL, hoc eſt, ipſi BL, ſimul æquales. Oſtenſum autem eſt BL minus ipſo BF, ergo exceſſus figuræ circumſcriptæ & inſcriptæ eodem BF, hoc eſt, ſpatio dato, minor erit; multo igitur minor erit exceſſus circumſcriptæ & portionis ABC, vel inſcriptæ & ejuſdem portionis, eodem ſpatio dato D. FIG. 70.

PROP.

PROP. XLIX.

FIG. 71. Sit Parabola ABC, cujus diameter AB, & vertex A; ipsi vero ordinatim applicatæ sint BC, DE; & compleantur parallelogramma ABCF, ADEG; & occurrant DE, BC ipsis CF, GE in H, K: erit spatium parabolicum BCLED minus parallelogrammo CFGK bis; parallelogrammum vero CBDH majus erit spatio parabolico CLEGF bis.

PEr C ducatur CM Parabolam contingens, occurratque diametro AB in M, & ipsi DE in N; & Parabolam in E contingat EO, occurratque ipsis AB, BC in O, P; per N vero ducatur ipsi AB parallela, occurratque BC in Q, & per M ducatur ipsi BC parallela, occurratque QN & CF in R, S, parallela autem ipsi AB per P ducta occurrat DE in T.

Quoniam igitur similia sunt triangula CQN, CBM, erit CQ ad QN, seu CH, ut CB ad BM, seu CS; & sunt circa communem angulum QCS, æqualia igitur sunt (per 14. 6.) parallelogramma CD, CR: &, quoniam contingit Parabolam CM, & diametro BM ordinatim applicata est CB, erit (per 14. lib. 1.) CS dupla ipsius CF; quare parallelogrammum CR duplum erit ipsius QF, & propterea est CD æquale ipsi QF bis. Eademque ratione, propter similia triangula ETP, EDO, ostendetur parallelogrammum DK æquale esse ipsi GT bis. Quoniam igitur est QF minus ipso FK, erit parallelogrammum CD minus ipso FK bis; & propterea spatium parabolicum BCLED ipso FK bis multo minus erit. Rursus, quoniam ostensum est parallelogrammum DK æquale ipsi GT bis, & est GT majus EF, erit GT bis, hoc est, ipsum DK, majus EF bis: est autem parallelogrammum KH majus spatio CLEH bis, additisque hisce inæqualibus, erit parallegrammum CD majus spatio parabolico CLEGF bis.

PROP. L.

Si a puncto Parabolæ ducatur ordinatim applicata ad diametrum

metrum quamlibet, & compleatur parallelogrammum contentum ordinatim applicatâ & ſegmento diametri inter verticem ipſius & applicatam; erit ſpatium parabolicum contentum ſegmento diametri, ordinatim ipſi applicatâ, & curvâ Parabolæ, æquale duplo ſpatii parabolici contenti reliquis parallelogrammi lateribus eâdemque curvâ.

SIt Parabola ABC, cujus diameter AB, & vertex ipſius A; ſitque BC diametro ordinatim applicata, & compleatur parallelogrammum ABCD: erit ſpatium contentum rectis AB, BC & Parabolâ AC duplum ſpatii contenti rectis AD, DC eâdemque AC. Fig. 72.

Si enim ſpatium ABC non ſit æquale ipſi ADC bis, erit vel ipſo majus, vel minus. Sit primo majus, excedatque ABC ipſum ADC bis ſpatio E, in ipſa vero ABC inſcribatur figura, ex parallelogrammis, deficiens a ſpatio ABC figurâ CFGHKLMNA, quæ minor ſit dimidio ipſius E; &, quoniam defectus hic bis minor eſt ipſo E, erit ſpatium ABC majus ipſo ADC bis & ſpatio CFGHKLMNA bis ſimul, hoc eſt, erit ABC majus figurâ CFGHKLMNAD bis: eſt autem (per Prop. præced.) ſpatium parabolicum BCMN minus figurâ CFGHKLMSD bis, & eſt ſpatium ANM minus ANMS bis; quare, additis hiſce inæqualibus, erit ſpatium BAC minus figurâ CFGHKLMNAD bis: idem vero BAC oſtenſum fuit eâdem figurâ majus; quod eſt abſurdum: Non igitur eſt ſpatium ABC majus ipſo ADC bis. Sit jam, ſi fieri poteſt, ſpatium ABC minus ipſo ADC bis, ſitque exceſſus ſpatio O æqualis; eſt igitur ABC ſimul cum O æquale ipſi ADC bis: circumſcribatur vero ipſi ABC figura ex parallelogrammis excedens ipſum ABC figurâ ASMRKQGPC, quæ minor ſit ſpatio O; erit igitur BAC ſimul cum ASMRKQGPC minus ipſo ADC bis, hoc eſt, erit tota figura BCPGQKRMSA minor ipſo ADC bis: per Prop. vero præced. eſt figura BCPGHKRN major ſpatio CMSD bis, & eſt ANMS major AMS bis; ergo, hiſce additis, eſt figura BCPGQKRMSA major ſpatio ACD bis: oſtenſa autem fuit eadem figura eodem ſpatio ACD bis minor; quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ſpatium ABC minus ipſo ADC bis, & oſtenſum fuit neque majus eſſe: neceſſe igitur eſt ipſum ABC ſpatium æquale eſſe ipſi ADC bis. *Q. E. D.*

Cor. Hinc manifeſtum eſt parallelogrammum Parabolæ circumſcriptum ſeſquialterum eſſe ſpatii parabolici.

P R O P. LI. *Quæ V. eſt Archimedis, de Conoid. & Sphæroid.*

Omne ſpatium ab (*a*) Ellipſi comprehenſum ad circulum cujus diameter æqualis eſt majori Ellipſeos diametro, eandem habet rationem quam minor ipſius diameter ad majorem, hoc eſt, ad ipſius circuli diametrum.

Archimedis Demonſtratio.

Fig. 73. SIt enim Ellipſis, ad quam ſunt puncta A, B, C, D, diameter vero ipſius major ſit ad quam A, C, minor vero ad quam B, D; ſit circulus circa diametrum AC: oſtendendum eſt ſpatium Ellipſi comprehenſum ad circulum eandem habere rationem, quam BD ad CA, hoc eſt, EF: quam vero rationem habet BD ad EF, eandem habeat circulus in quo eſt Z ad circulum AECF; dico quod æqualis eſt circulus Z Ellipſi. Si enim æqualis non ſit circulus Z ſpatio ab Ellipſi comprehenſo, ſit primo, ſi fieri poteſt, major; poterit igitur in circulo Z polygonum parem habens numerum angulorum inſcribi, majus ABCD ſpatio. Intelligatur inſcriptum eſſe, & in circulo AECF inſcribatur figura rectilinea ſimilis in Z circulo inſcriptæ; & ab ipſius angulis perpendiculares ducantur ad diametrum AC, ad puncta vero, in quibus perpendiculares Ellipſin ſecant, rectæ jungantur: erit igitur figura rectilinea quædam in Ellipſi inſcripta, & habebit ipſa ad rectilineum, in ipſo AECF circulo inſcriptum, eandem rationem quam BD ad ipſam EF: quoniam enim perpendiculares EH, KL in eadem ratione ſectæ ſunt in M, B, manifeſtum eſt quod trapezium LE ad ipſum HM eandem habeat rationem, quam HE ad BH; quare & unumquodque reliquorum in circulo trapeziorum ad unumquodque in Ellipſi trapezium eandem habet rationem, quam EH ad ipſam BH: habent autem & triangula in circulo ad puncta A, C, ad ea quæ in Ellipſi ſunt, eandem rationem; habebit igitur & totum rectilineum in circulo AECF inſcriptum, ad totum rectilineum in Ellipſi inſcriptum, eandem rationem quam EF ad

(*a*) Sectione coni acutanguli.

ad ipſam BD: hanc autem rationem habet idem hoc rectilineum ad inſcriptum in circulo Z, quoniam & ipſi circuli hanc habebant rationem; rectilineum igitur, in circulo Z inſcriptum, æquale eſt rectilineo Ellipſi inſcripto; quod fieri non poteſt: majus enim erat toto ſpatio ab Ellipſi comprehenſo. Sed eſto, ſi fieri poteſt, minor: Rurſus, poteſt in Ellipſi inſcribi polygonum, paribus numero lateribus contentum, majus circulo Z. Inſcribatur igitur, & ab ipſius angulis perpendiculares ducantur ad ipſam AC, & producantur ad circumferentiam circuli; rurſus igitur inſcriptum erit in circulo AECF rectilineum, quod habebit ad inſcriptum in Ellipſi eandem rationem quam EF ad BD, inſcriptoque in circulo Z huic ſimili, oſtendetur inſcriptum in circulo Z æquale eſſe inſcripto in Ellipſi; quod fieri non poteſt: neque igitur minor eſt Z circulus ſpatio ab Ellipſi comprehenſo. Manifeſtum igitur eſt dictum ſpatium ad circulum AECF eandem habere rationem, quam BD ad ipſam EF.

PROP. LII. *Quæ VI. eſt Archimedis, de Conoid. & Sphæroid.*

Omne ſpatium ab Ellipſi comprehenſum ad quemcunque circulum eandem rationem habet, quam *rectangulum* Ellipſeos diametris contentum ad quadratum ex circuli diametro.

Archimedis Demonſtratio.

Sit enim Ellipſis in qua Y, ipſius vero Ellipſeos diametri ſint AC, BD, & major quidem AC; ſitque circulus in quo Z, & diameter ipſius EF: oſtendendum eſt ſpatium Y ad circulum Z eandem habere rationem, quam contentum ipſis AC, BD ad quadratum ex EF. Deſcribatur itaque circulus circa diametrum AC: ſpatium igitur Y ad circulum, cujus diameter eſt AC, eandem habet rationem quam contentum ipſis AC, BD ad quadratum ex ipſa AC; oſtenſum enim eſt, *ſpatium* Y *ad circulum, cujus diameter eſt* AC, *eandem* habere *rationem quam* BD ad ipſam AC: circulus vero cujus diameter eſt AC, ad circulum cujus diameter eſt EF, eandem habet rationem quam quadratum ex AC ad quadratum ex EF: Manifeſtum igitur ſpatium Y ad circulum Z eandem habere rationem, quam contentum ipſis AC, BD ad quadratum ex EF. FIG. 74.

PROP.

PROP. LIII. *Quæ* VII. *est Archimedis, de Conoid. & Sphæroid.*

Spatia ab Ellipsibus comprehensa inter se eandem habent rationem, quam inter se *habent rectangula* ipsarum diametris contenta.

Archimedis Demonstratio.

FIG. 75. SInt spatia comprehensa Ellipsibus, in quibus A, B; sit vero & CD *rectangulum* contentum diametris Ellipseos, quæ comprehendit spatium A; ipsum vero EF contentum diametris alterius sectionis: ostendendum spatium A ad spatium B eandem habere rationem, quam ipsum CD ad ipsum EF. Sumatur itaque circulus quispiam in quo Z, sit vero KL quadratum ex ipsius diametro; habet igitur spatium A ad ipsum Z circulum eandem rationem, quam CD ad KL, circulus vero Z ad spatium B eandem rationem quam KL ad ipsum EF: manifestum igitur spatium A ad ipsum B eandem habere rationem, quam CD ad EF. Ex hoc vero manifestum, spatia Ellipsibus similibus comprehensa eandem inter se habere rationem, quam habent inter se quadrata ex ipsarum diametris homologis.

FINIS.